目次

第 1 章

剛体

1.1　固定軸をもつ剛体の運動

剛体が 1 直線のまわりに自由に回転でき，そしてその回転以外の運動ができない場合，この直線を**固定軸**という．この軸のまわりの回転角だけで剛体の位置と傾きは定まる．したがって自由度は 1 であり，1 個の運動方程式で運動がきまるはずである．これは 6 個の運動方程式の中からうまく選び出さなければならないが，この場合には直感手 k 時にわかるように，固定軸のまわりの角運動量に対する式を使えば良い．

固定軸を z 軸にとり，剛体を構成する各質点 (質量 m_j) の軸からの距離を r_j としよう．軸上に原点をもち，空間に固定した円柱座標 (r_j, φ_j, z_j) を用いれば，質点 j の角速度は $\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}t}$ である．しかし，図からわかるように

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

は各質点に共通であって，剛体の角速度である．そして質点 j の運動量は $m_j r_j \omega$ であり，軸に関する角運動量は $m_j {r_j}^2 \omega$ である．したがって，軸に関する全角運動量 L_z は

$$L_z = \sum_j m_j {r_j}^2 \omega \tag{1.2}$$

となる．

1.1.1　振り子問題—質点

よくある振り子の問題である．

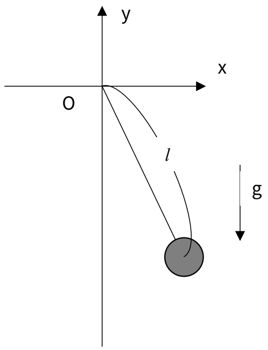

図 1.1

慣性モーメントの解法の戦略

1. **密度を求める。**
   - 三次元では剛体の質量 M を体積 V で割った密度 $\rho = \frac{M}{V}$
   - 二次元では剛体の質量 M を面積 S で割った面密度 $\sigma = \frac{M}{S}$
   - 一次元では剛体の質量 M を長さ L で割った線密度 $\lambda = \frac{M}{L}$

   を求めて用いる.

2. **密度や微小区間を用いて dm を表す。**
   - 三次元 (xyz 空間) では微小体積 $dV = dxdydz$ を用いれば密度は $\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$ でもあるので,
   $$dm = \rho\ dV = \rho\ dxdydz \tag{1.3}$$
   - 二次元 (xy 平面) では微小面積 $dS = dxdy$ を用いれば面密度は $\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S}$ でもあるので,
   $$dm = \sigma dS = \sigma dxdy \tag{1.4}$$
   - 一次元 (x 軸) では微小長さ $dL = dx$ を用いれば線密度は $\lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}L}$ でもあるので,
   $$dm = \lambda dL = \lambda dx \tag{1.5}$$

   となる。

3. **回転軸を把握して，軸からの距離 r を座標軸の変数を用いて表す**
回転軸からの距離 r は，あくまでも（慣性）モーメント なので，回転軸から dm までの最短距離を座標軸の変数 $(x, y, z$ など$)$ を用いて表す．直交座標系では，質点（点）ではない剛体（連続体）の場合，r は定数とはならない．（極座標系で円環や球殻などを考えるときは，r は半径という定数になる）

4. **問題となっている物体の範囲を把握する**
物体の形状に応じた変数の取りうる範囲（領域）を把握して，次で式を立てる際に定積分の範囲を入れる．その際，回転軸を基準（あくまでも軸であって点ではないが，原点のこと）として範囲を考える．

5. **慣性モーメントを求める式を立てる**
   - 三次元 $(xyz$ 空間$)$ では
$$I = \int_V r^2 \ dm = \iiint r^2 \rho \ dxdydz = \frac{M}{V} \iiint r^2 \ dxdydz \tag{1.6}$$
   - 二次元 $(xy$ 平面$)$ では
$$I = \int_S r^2 \ dm = \iint r^2 \sigma \ dxdy = \frac{M}{S} \iint r^2 \ dxdy \tag{1.7}$$
   - 一次元 $(x$ 軸$)$ では
$$I = \int_V r^2 \ dm = \int r^2 \lambda \ dx = \frac{M}{L} \int r^2 \ dx \tag{1.8}$$

1.1.2　振り子問題—剛体

図 1.2 のように水平方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとり，台 A を x 軸上においた．台 A は大きさを無視できる．台 A から，質量 M，長さ $2a$ の太さが無視できる一様な棒をつり下げた．棒は台 A を中心に xy 座標平面内で，なめらかに回転することができる．空気抵抗は無視してよい．また，重力加速度の大きさは g とする．

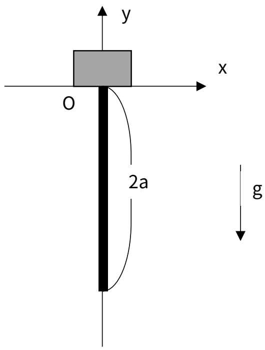

図 1.2

このときの z 軸周りの慣性モーメント I は

$$I = \frac{M}{2a}\int_0^{2a} y^2\ dy \tag{1.9}$$

より $I = \dfrac{4}{3}Ma^2$ となる．

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -aMg\sin\theta \sim -aMg\theta \tag{1.10}$$

となる．単振動型の微分方程式：

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mga}{I}\theta \tag{1.11}$$

より，角速度 $\omega^2 = \frac{Mga}{I}$ より，$\omega = \sqrt{\frac{Mga}{I}}$ が分かる．

質点の振り子問題として考えてみる．重心の運動方程式を立てると

$$M\frac{a}{2}\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta \sim -Mg\theta \tag{1.12}$$

より，$\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$ となった．これとは一致するのだろうか？計算してみよう！

$$\sqrt{\frac{Mga}{I}} = \sqrt{\frac{Mga}{\frac{4}{3}Ma^2}} = \sqrt{\frac{3g}{4a}} \quad \text{(一致しない)} \tag{1.13}$$

最大角を求める

もし仮にこの棒に (x 軸の負のほうから正のほうへ) 力積 P が加えられたとき，θ の最大角はいくつになるだろうか．角運動量 $\boldsymbol{L}$, 位置 $\boldsymbol{r}$, 運動量 $\boldsymbol{p}$ とすると，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ がいえる．z 軸成分に注目すると

$$I\dot{\theta} = aP \tag{1.14}$$

がいえる．[*1] 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = Mga(1-\cos\theta_0) \sim Mga \cdot \frac{1}{2}\theta_0^2 \qquad (\text{最大角を}\theta_0\text{とした}) \tag{1.15}$$

$$\theta_0 = P\sqrt{\frac{a}{MgI}} \tag{1.16}$$

1.1.3　球突き問題

水平面上においた一様な球に，中心を含む鉛直面内で，水平な撃力を与えたときの運動を知らべよう．これは，球突きの問題と呼ばれる．

撃力の力積を J とすると，力積は運動量の変化に等しいから，質量 M の球は (撃力はきわめて短時間だけ作用するので摩擦力の力積は無視できる)

$$Mv_0 = J \tag{1.17}$$

で与えられる速度 v_0 で動き出す．同時に撃力のモーメントにより回転運動が生じる．撃力 F が面の高さから l のところで水平に与えられたとすると，重心に対する力のモーメントは $(l-a)F$ であるから，回転に対して (F' は摩擦力)

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = (l-a)F - aF' \tag{1.18}$$

[*1] ベクトル位置 $\boldsymbol{r}$, 運動量 $\boldsymbol{p}$ の関係は図 1.3 であるから，z 成分の大きさは $\sin(\pi/2) = 1$ より普通の積と等しい．また力積 P であるが，与える前後の運動量の差は $P = p - 0$ より $P = p$ である．

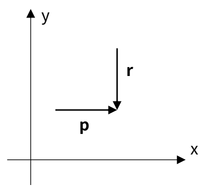

図 1.3

が成り立つ．撃力のはたらく短い時間内で積分すれば球は

$$I\omega_0 = (l - a)J \tag{1.19}$$

で与えられる角速度 ω_0 で回転し出すことがわかる．