量子力学 II

問1

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] = \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger a_k$$

$$= \frac{1}{2\hbar}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{x}_k + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}_k\right)\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{x}_k - i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}_k\right)$$

$$- \frac{1}{2\hbar}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{x}_k - i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}_k\right)\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{x}_k + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}p_k\right)$$

$$= \frac{1}{2\hbar}\left(\cancel{m\omega\hat{x}_k^2} - i\hat{x}_k\hat{p}_k + i\hat{p}_k\hat{x}_k - \cancel{\frac{1}{m\omega}\hat{p}_k^2}\right)$$

$$- \frac{1}{2\hbar}\left(\cancel{m\omega x_k^2} + i\hat{x}_k\hat{p}_k - i\hat{p}_k\hat{x}_k - \cancel{\frac{1}{m\omega}\hat{p}_k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\hbar}\cdot -i\underbrace{[\hat{x}_k, \hat{p}_k]}_{i\hbar} - \frac{1}{2\hbar}\cdot i\underbrace{[\hat{x}_k, \hat{p}_k]}_{i\hbar}$$

$$= 1$$

生成消滅演子を足すと

$$\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,\hat{x}_k = \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k$$

$$\therefore\ \hat{x}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a_k^\dagger + a_k)$$

生成消滅演算子を引くと

$$\frac{2i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p}_k = \hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger$$

$$\therefore\ \hat{p}_k = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger)$$

ゆえに

$$\hat{H}_k = \frac{\hat{p}_k^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_k^2$$

$\hat{H} = \sum_{k=1}^{2}\hat{H}_k$ とする

$$= -\frac{1}{2m}\cdot\frac{\hbar m\omega}{2}(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\cdot\frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k)^2$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{4}(\cancel{\hat{a}_k^2} - \hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k + \cancel{\hat{a}_k^{\dagger 2}})$$

$$+ \frac{\hbar\omega}{4}(\cancel{\hat{a}_k^{\dagger 2}} + \hat{a}_k^\dagger a_k + \hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger + \cancel{\hat{a}_k^2})$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k)$$

$\hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger a_k = 1.$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}(1 + \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger a_k) = \hbar\omega(\hat{a}_k^\dagger a_k + \frac{1}{2})$$

$$\therefore \hat{H} = \sum_k \hbar\omega(\hat{a}_k^\dagger a_k + \frac{1}{2})$$

問2

$|n\rangle = |n_1, n_2\rangle$ と表すことにする。ただし、$n = n_1 + n_2$。
このとき、

$$|n\rangle = (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}|0\rangle$$

で表せる。

$$\hat{H}|n\rangle = \sum_k \hbar\omega(\hat{a}_k^\dagger a_k + \frac{1}{2})|n\rangle$$

$$= \hbar\omega(\hat{a}_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2})|n_1, n_2\rangle$$

$$+ \hbar\omega(\hat{a}_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2})|n_1, n_2\rangle$$

$$= \hbar\omega + \hbar\omega\,\underline{\underline{\hat{a}_1^\dagger a_1(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}}}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}|0\rangle$$

$$+ \hbar\omega\,\underline{\underline{\hat{a}_2^\dagger a_2(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}}}(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}|0\rangle$$

═ の部分を $[a_k, \hat{a}_k^\dagger] = 1$ の関係を使って整理していくと、

$$= \hbar\omega + \hbar\omega\, n_1(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}|0\rangle$$

$$+ \hbar\omega\, n_2(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}|0\rangle$$

$$= \hbar\omega + \hbar\omega\, n_1|n\rangle + \hbar\omega\, n_2|n\rangle$$

$$= \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) = \hbar\omega(n+1)|n\rangle$$

つまり エネルギー固有値 $E_n = \hbar\omega(n+1)$ となる。
(ただし、規格化していない)

組み合わせは、$(n_1, n_2) = (n, 0), (n-1, 1) \cdots, (0, n)$
なので $n+1$ 重の縮退度がある。

問3

$$\hat{a}_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\sqrt{m\omega}\,\hat{x}_k + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}_k\right]$$ なので

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\sqrt{m\omega}\,\hat{x}_k + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p}_k\right]\psi_0(r) = 0$$

いま、$\hat{x}_k \to x_k$, $\hat{p}_k \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ なので

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\sqrt{m\omega}\,x_k + \frac{\hbar}{\sqrt{m\omega}}\frac{\partial}{\partial x_k}\right]\psi_0(r) = 0$$

$\frac{\partial}{\partial x_k}\psi_0(r) = -\frac{m\omega}{\hbar}x_k\psi_0(r)$ という微分方程式が得られる。

$$\therefore \quad \psi_0(r) = N\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x_k^2\right) \qquad (N:\text{規格化定数})$$

これは $k=1,2$ に対して成り立つ必要がある。ゆえに、

$$\psi_0(r) = N\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2+x_2^2)\right\} \quad \leftarrow \psi_0(r) = \psi_0(x_1)\psi_0(x_2)$$

$$= N\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right) \quad //$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\psi_0(r)\psi_0^*(r)\,r\,dr\,d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}N^2\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right)r\,dr\,d\phi$$

$$= N^2\cdot 2\pi\,\frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$= N^2\frac{\pi\hbar}{m\omega} = 1 \qquad \int_0^{\infty}x\exp(-ax^2)\,dx = \frac{1}{2a}$$

$$\therefore \quad N = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$$

$$\therefore \quad \psi_0(r) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right) \quad //$$

問4

$|1\rangle = \hat{a}_k^\dagger |0\rangle$ を満たすので

$$|1\rangle = \sum_k \hat{a}_k^\dagger \psi_0(x_1)\psi_0(x_2)$$

$$= \hat{a}_1^\dagger \psi_0(x_1)\psi_0(x_2) + \hat{a}_2^\dagger \psi_0(x_1)\psi_0(x_2)$$

$$\hat{a}_1^\dagger \psi_0(x_1)\psi_0(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\sqrt{m\omega}\,x_1 - \frac{\hbar}{\sqrt{m\omega}}\frac{\partial}{\partial x_1}\right]\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2+x_2^2)\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x_1 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right) + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x_1 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x_1 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right)$$

規格化すると.

$$\frac{2m\omega}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right)dx_1 dx_2$$

$\downarrow$ $x_1 = r\cos\phi$ とおく.

$$= \frac{2m\omega}{\hbar}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r^3\cos^2\phi \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right)dr\,d\phi$$

$$= \frac{2m\omega}{\hbar}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{r^3}{2} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right)dr\,d\phi$$

$\uparrow$

$\cos^2\phi = \frac{1+\cos 2\phi}{2}$ だが第2項は消えるので

$$= \frac{2m\omega}{\hbar}\cancel{2}\pi\int_0^{\infty} \frac{r^3}{\cancel{2}} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right)dr$$

$$= \frac{\cancel{2m\omega}}{\cancel{\hbar}}\pi\cdot\frac{\hbar^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\,m^{\cancel{2}}\omega^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{\pi\hbar}{m\omega}$$

であることから.

$$\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\cdot\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x_1\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right)$$

$$= \frac{m\omega}{\hbar}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x_1\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right) \equiv \psi_{10}$$

$\psi_1 = \alpha \psi_{10} + \beta \psi_{01}$ とおくと.

$(\alpha \psi_{10}^* + \beta \psi_{01}^*)(\alpha \psi_{10} + \beta \psi_{01}) = \alpha^2 \psi_{10}^* \psi_{10} + \beta^2 \psi_{01}^* \psi_{01}$ となる。

ゆえに ψ_1 を規格化すると $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ を満たせばよい。

規格化された波動関数は.

$$\psi_1 = (\alpha x_1 + \beta x_2) \frac{m\omega}{\hbar} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2\right)$$ //

エネルギーは $E_1 = 2\hbar\omega$ //

$$\hat{a}_k^{+}\,\psi_0(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left[\sqrt{m\omega}\,x_k - \frac{\hbar}{\sqrt{m\omega}}\frac{\partial}{\partial x_k}\right] N \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x_k^2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x_k \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x_k^2\right) + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x_k \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x_k^2\right)$$

$$= N\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x_k \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x_k^2\right)$$

なので $\tilde{\psi}_1(r) = \frac{2m\omega}{\hbar} N x_1 x_2 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right)$ となる。

面長いし
おきたい
から
こちら

波動関数を規格化すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_1^*(r)\,\psi_1(r)\,dx_1dx_2 = \frac{4m^2\omega^2}{\hbar^2}N^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1x_2)^2\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right)dx_1dx_2$$

$$= \frac{4m^2\omega^2}{\hbar^2}N^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{r^5}{\cancel{4}}\boxed{\sin^2 2\phi}\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right)d\phi\,dr$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{array}\right\} \text{より}\quad x_1x_2 = r^2\sin\phi\cos\phi = \frac{r^2}{2}\sin 2\phi$$

$$\boxed{} = \frac{1-\cos 4\phi}{2}$$

以下では $\overbrace{\cos 4\phi}^{a\text{項}}$ は積分すると0になるので略。

$$= \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}N^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}r^5\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}r^5\right)d\phi\,dr$$

$$= \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}N^2\pi\int_0^{\infty}r^5\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}r^5\right)dr$$

$$= \frac{\cancel{m^2\omega^2}}{\cancel{\hbar^2}}N^2\pi\cdot\frac{\hbar^3}{m^3\omega^3} = 1$$

$$\therefore\ N^2 = \frac{m\omega}{\pi\hbar} \qquad \therefore\ N = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$$

$$\therefore\ \psi_1(r) = \frac{2m\omega}{\hbar}N x_1x_2\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right)$$

$$= \frac{2m\omega}{\hbar}\cdot\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\,\frac{r^2}{2}\sin 2\phi\,\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} r^2\sin 2\phi\,\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right)$$

2 弱い磁場による摂動

(1) $\hat{H}'\psi_0 = -\frac{qB_0}{2m}(\hat{x}\hat{p}_y - y\hat{p}_x)\psi_0$ であり、簡単のために次を計算すると、

$$\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{-\lambda(x^2+y^2)} = (-2\lambda xy + 2\lambda yx)\,e^{-\lambda(x^2+y^2)} = 0$$

ゆえに、基底状態のエネルギー固有値は0。

(2) 同様に求める。

$\hat{H}'$の固有値.

$$\hat{H}'\psi_1 = h\psi_1$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[(\alpha x+\beta y)\,e^{-\lambda(x^2+y^2)}\right]$$

$$= -\cancel{2x^2y\lambda\,\alpha e^{-\lambda(x^2+y^2)}} + x\,\alpha e^{-\lambda(x^2+y^2)} - \cancel{2xy^2\lambda\,\alpha e^{-\lambda(x^2+y^2)}}$$
$$- y\,\beta e^{-\lambda(x^2+y^2)} + \cancel{2x^2y\lambda\,\beta e^{-\lambda(x^2+y^2)}} + \cancel{2xy^2\lambda\,\beta e^{-\lambda(x^2+y^2)}}$$

$$= (-\alpha y+\beta x)\,e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$-\frac{qB_0}{2m}\frac{\hbar}{i}(-\alpha y+\beta x) = h(\alpha x+\beta y)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{qB_0\hbar i}{2m}\beta x - \frac{qB_0\hbar i}{2m}\alpha y = h\alpha x + h\beta y$$

$$\begin{cases} \dfrac{qB_0\hbar i\beta}{2m} = h\alpha \\[2ex] -\dfrac{qB_0\hbar i\alpha}{2m} = h\beta \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{qB_0\hbar}{2m}\right)^2 = h^2$$

$$h = \pm\frac{qB_0\hbar}{2m}$$ //