微分方程式入門（非同次）

非同次定係数

$$\boxed{y''+ay'+by=f(x)}$$

$y''+ay'+by=f(x)$ の特殊解 $\alpha(x)$ がわかっている場合

$$\begin{array}{rl} & y''+ay'+by=f(x) \\ - & \alpha''+a\alpha'+b\alpha=f(x) \\ \hline & (y-\alpha)''+a(y-\alpha)'+b(y-\alpha)=0 \end{array}$$

$Y=y-\alpha$ とおくと、

$$Y''+aY'+bY=0$$ （同次方程式）

これを解くと、

基本解

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2$$

$$\therefore y=C_1Y_1+C_2Y_2+\alpha$$

非同次微分方程式 の微分方程式

非同次微分方程式 の一般解

同次微分方程式 の一般解

例 $y''+y'-6y=2x^2$ …(＊)

$y''+y'-6y=0$ を解く

$$\lambda^2+\lambda-6=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda+3)=0$$

$$\therefore \lambda=2,-3$$

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$$

(＊)の $y$ に

満たせば なんでもよい

$$\alpha(x)=Ax^2+Bx+C$$

単なる予想

を代入すると、

$$2A+2Ax+B-6(Ax^2+Bx+C)=2x^2$$

$$-6Ax^2+(2A-6B)x+(2A+B-6C)=2x^2$$

係数を比較して

$$\begin{cases} -6A=2 \\ 2A-6B=0 \\ 2A+B-6C=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{9} \\ C=-\frac{7}{54} \end{cases}$$

以上より (＊)の一般解は、

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{7}{54}$$

一般解

特殊解

基本的には、特殊解は予想すべし

ただし
右辺がどんな関数でも
特殊解を探す方法がある。
‖
定数変化法

Step 1　㊐を解く。

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

基本解

Step 2　$c_1, c_2$ を $c_1(x), c_2(x)$ にし、
ある条件を課して㊊に代入する。

$y = c_1(x) y_1 + c_2 y_2$ の形で、かつ

$c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0$ を満たすような

もので㊊の解になる $c_1(x), c_2(x)$

を探す。

$$y' = \cancel{c_1'(x) y_1} + c_1(x) y_1' + \cancel{c_2'(x) y_2} + c_2(x) y_2'$$

$$y'' = c_1'(x) y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y''$$

であるから、

$y'' + ay' + by$

$$= c_1'(x) y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y''$$
$$+ a ( c_1(x) y_1' + c_2(x) y_2' )$$
$$+ b ( c_1 y_1 + c_2 y_2 )$$

$y_1, y_2$ は
㊐2次元斉次方程式
の解なので…

$$= c_1(x) ( y_1'' + ay_1' + by_1 ) \neq 0$$
$$+ c_2(x) ( y_2'' + ay_2' + by_2 ) \neq 0$$
$$+ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2'$$

よって.

$$\begin{cases} c_1(x)\,y_1 + c_2(x)\,y_2 = 0 \\ c_1'(x)\,y_1' + c_2'(x)\,y_2 = f(x) \end{cases}$$

を満たす $c_1(x)$, $c_2(x)$ を考えればよい.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$ とおくと.

ロンスキー行列

$x$ の値によらず. $W(y_1, y_2) \neq 0$ だより.

(証明略)

は逆行列をもつ. したがって.

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)}\begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ c_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$c_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)}$$

よって

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx, \quad c_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx$$

以上より

特殊解なので 積分定数はいらない

$$\boxed{\alpha(x) = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{\boxed{W(y_1, y_2)}}\,dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{\boxed{W(y_1, y_2)}}\,dx}$$

※ $x$ を含むので注意.

は特殊解

例.

$$y'' + y' - 6y = 2x^2$$

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-3x}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -5e^{-x}$$ $(\neq 0)$

$$\alpha(x) = -e^{2x}\int \frac{2x^2 e^{-3x}}{-5e^{-x}}\,dx + e^{-3x}\int \frac{2x^2 e^{2x}}{-5e^{-x}}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}e^{2x}\int x^2 e^{-2x}\,dx - \frac{2}{5}e^{-3x}\int x^2 e^{3x}\,dx$$

$$= -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cancel{e^{2x}}\cdot\cancel{e^{-2x}}\left(2x^2+2x+1\right)$$

$$-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{27}\cancel{e^{-3x}}\cdot\cancel{e^{3x}}\left(9x^2-6x+1\right)$$

$$= -\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{7}{54}$$

一致した!!