問1 数学 A

(1) (i)

$$\frac{dy}{dx} + xy = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x(1-y)$$

$$\frac{1}{1-y}dy = x\,dx.$$

$$\log(1-y) = \frac{1}{2}x^2 + \text{Const}$$

$$1-y = Ae^{\frac{1}{2}x^2} \quad (A:\text{Const})$$

$$\therefore\ y = Ae^{\frac{1}{2}x^2} + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{1}{y}dy = -dx.$$

$$\log y = -x + \text{Const}$$

$$y = Ae^{-x}$$

(ii) 非同次方程式ではなく同次方程式：

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{—— ①}$$

を求める。①の一般解は $y = Ae^{-x}$

ここで $y = ax + b$ とおいて $\frac{dy}{dx} + y = x$ を解いてみる。

$$a + ax + b = x.$$

$$(a-1)x + a + b = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} a-1=0 \\ a+b=0. \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \end{array}$$

以上より、$\frac{dy}{dx} + y = x$ の一般解は $y = Ae^{-x} + x - 1$

(iii) $z = y^{1-n}$ より $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{1-n}y^n$ が言える。

$$\boxed{\begin{array}{l} dz = 1-n\,y^{-n}\,dy. \\ \frac{1}{1-n}y^n = \frac{dy}{dz} \end{array}}$$

よって

$$y^{-n}\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + f_1(x)y^{1-n} = f_2(x)$$

$$\cancel{y^{-n}}\frac{1}{1-n}\cancel{y^n}\frac{dz}{dx} + f_1(x)z = f_2(x).$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + f_1(x)z = f_2(x). \quad //$$

(iv)

$$\frac{dy}{dx} + xy = y^2x.$$

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 - y)$$

$$\frac{1}{y^2-y}dy = x\,dx.$$

$$\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)dy = x$$

$$\log(y-1) - \log y = \frac{1}{2}x^2 + \text{Const}$$

$$\log\frac{y-1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + \text{Const}$$

$$\frac{y-1}{y} = Ae^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (A:\text{const})$$

$$1 - \frac{1}{y} = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\frac{1}{y} = Ae^{-\frac{1}{2}x^2} + 1 \quad \therefore\ y = \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}x^2}+1} \quad //$$

(2) (i) 右辺は、$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$ であるから、

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi = n_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + n_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + n_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

左辺は、

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+hn_x, y+hn_y, z+hn_z) - \phi(x, y+hn_y, z+hn_z)}{h}$$

$$+\frac{\phi(x, y+hn_y, z+hn_z) - \phi(x, y, z+hn_z)}{h}$$

$$+\frac{\phi(x, y, z+hn_z) - \phi(x, y, z)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} n_x\frac{\phi(x+hn_x, y+hn_y, z+hn_z) - \phi(x, y+hn_y, z+hn_z)}{hn_x}$$

$$+ \cdots$$

$$= n_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + n_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + n_z\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad //$$

(ii) (i)より $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi$ が言える。

両辺に $\boldsymbol{n}$ をかける。

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi)$$

$$=$$

$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla\psi = 0$

保存場である
どこで使った？

(iii) 右辺について、

$$\left[\tfrac{1}{2}\nabla v^2\right]_i = \tfrac{1}{2}\partial_i v_j v_j$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[v_j\partial_i v_j + v_j\partial_i v_j\right] = v_j\partial_i v_j$$

$$[\boldsymbol{v}\times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}]_i = \varepsilon_{ijk}v_j[\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}]_k$$

$$= \varepsilon_{ijk}v_j\varepsilon_{klm}\partial_l v_m$$

$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}v_j\partial_l v_m$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})v_j\partial_l v_m$$

$$= \delta_{il}\delta_{jm}v_j\partial_l v_m - \delta_{im}\delta_{jl}v_j\partial_l v_m$$

$$= v_j\partial_i v_j - v_j\partial_j v_i$$

であるから、

$$(\text{右辺}) = \left[\tfrac{1}{2}\nabla v^2 - \boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\right]_i = \cancel{v_j\partial_i v_j - v_j\partial_i v_j} + v_j\partial_j v_i$$

$$(\text{左辺}) = [(v\cdot\nabla)v]_i = v_j\partial_j v_i = (\text{右辺}) \quad \blacksquare$$

(iv)
$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2 + \psi\right) = l\cdot\left(\frac{1}{2}\nabla v^2 + \nabla\psi\right)$$
$$= l\cdot\left(\cancel{(v\cdot\nabla)v} + v\times\mathrm{rot}\, v + \cancel{\nabla\psi}\right)$$
$$= l\cdot\left(v\times\mathrm{rot}\, v\right)$$
$$=$$

数学B

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \exp(a)$ なので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \exp(a) - 1$ に収束する。

(2)
$$\int_0^1 \int_0^1 y^2 e^{xy}\, dx\, dy = \int_0^1 (y e^y - y)\, dy$$
$$= \underbrace{\int_0^1 y e^y\, dy}_{=1} - \underbrace{\int_0^1 y\, dy}_{= \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$ //

$$\int_0^1 y e^y\, dy = \left[y e^y \right]_0^1 - \int_0^1 e^y\, dy$$
$$= e - \left[e^y \right]_0^1$$
$$= e - e + 1$$

(3)
$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$2y = e^x - \frac{1}{e^x}$$
$$2y e^x = e^{2x} - 1$$
$$0 = e^{2x} - 2y e^x - 1$$

$X = e^x \ (>0)$ とおくと
$$0 = X^2 - 2yX - 1$$
$$X = y + \sqrt{y^2+1}$$ ($X > 0$ より)
$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$
$$x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

以上より、$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ //

(4)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) 行列式
$$\det|A| = (-1+0+0) - (6+2+0)$$
$$= -1 - 8 = -9$$ //

(ii) 逆行列.
$$\tilde{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1-2) = -3$$
$$\tilde{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0-2) = 2$$
$$\tilde{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0-2) = -2$$

$$\tilde{A}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-6) = 6$$

$$\tilde{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1-6) = -7$$

$$\tilde{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2-0) = -2$$

$$\tilde{A}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0-3) = -3$$

$$\tilde{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1-0) = -1$$

$$\tilde{A}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1-0) = 1$$

ゆえに $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & -7 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

逆行列 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}^T$

$$= -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 2 & -7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

(iii) Aの固有値を求める。

固有値方程式 $\det(A - \lambda E) = 0$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = -\underline{(1-\lambda)}^2(1+\lambda) - 6\underline{(1-\lambda)} - 2\underline{(1-\lambda)}$$

$$= (\lambda-1)\left[(1-\lambda)(1+\lambda) + 6 + 2\right]$$

$$= (\lambda-1)(1-\lambda^2+8)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+3) = 0$$

固有値は $\lambda = -3, 1, 3$ //

(iv) 固有値ベクトルを求める.

(a) $\lambda = 3$ のとき.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} -2x + 3z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{3}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{array}$$

∴ 固有値ベクトルは.
(t : 任意) $t \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\lambda = 1$ のとき

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 3z = 0 \\ z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = -y \\ z = 0 \end{array}$$

∴ 固有値ベクトルは
(t : 任意) $t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\lambda = -3$ のとき.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 3z = 0 \\ 4y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}z \\ y = -\frac{1}{4}z \end{array}$$

∴ 固有値ベクトルは
(t : 任意) $t \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$ //

(v) $A^3 = (PDP^{-1})^3$

$$= PD\underline{P^{-1}P}D\underline{P^{-1}P}D\underline{P^{-1}P}DP^{-1}$$

$$= PD^3P^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = PD^2P^{-1}$$

$$PD^3P^{-1} + aPD^2P^{-1} + bPDP^{-1} + cE = 0.$$

$$P(D^3 + aD^2 + bD)P^{-1} + cE = 0.$$

$$P\begin{bmatrix} -27+9a-3b & & 0 \\ & 1+a+b & \\ 0 & & 27+9a+3b \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} -c & & 0 \\ & -c & \\ 0 & & -c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -27+9a-3b & & \\ & 1+a+b & \\ & & 27+9a+3b \end{bmatrix} = -cP^{-1}EP = -cE$$

ゆえに次の連立方程式を得る.

$$\begin{cases} -27+9a-3b = -c \\ 1+a+b = -c \\ 27+9a+3b = -c \end{cases}$$

$$-27+\cancel{9a}-3b = 27+\cancel{9a}+3b$$

$$-54 = 6b$$

$$-9 = b$$

$$-\cancel{27}+9a+\cancel{27} = 1+a-9$$

$$8a = -8$$

$$a = -1$$

$$\begin{array}{rl} & -27+9a-3b = -c \\ +) & 27+9a+3b = -c \\ \hline & 18a = -2c \end{array}$$

$$9a = -c \rightarrow c = +9$$

$$\therefore\ \underline{a = -1,\ b = -9,\ c = 9}$$ //

```
(%i1) solve([-27+9·a-3·b=-c,1+a+b=-c,27+9·a+3·b=-c],[a,b,c]);
(%o1) [[a=-1,b=-9,c=9]]
```

(vi) $\underline{\underline{A^6}} - 2A^5 - 6A^4 + 14A^3 - 25A^2 + 30A - 12E$

$= \underline{\underline{\cancel{A^5} + \cancel{9A^4} - \cancel{9A^3}}} - 2\cancel{A^5} - \cancel{6}A^4 + \cancel{14}A^3 - \cancel{25}A^2 + \cancel{30}A - 12E$

$= -A^5 + 3A^4 + 5A^3 - 25A^2 + 30A - 12E$

$= -(\cancel{A^4} + \cancel{9A^3} - \cancel{9A^2}) + \cancel{3A^4} + \cancel{5}A^3 - \cancel{25}A^2 + 30A - 12E$

$= 2A^4 - 4A^3 - 16A^2 + 30A - 12E$

$= 2(\cancel{A^3} + 9A^2 - 9A) - \cancel{4A^3} - 16A^2 + 30A - 12E$ $\qquad A^3 = A^2 + 9A - 9$

$= -2A^3 + 2A^2 + 12A - 12E$

$= -2(\cancel{A^2} + 9A - 9) + \cancel{2A^2} + 12A - 12E$

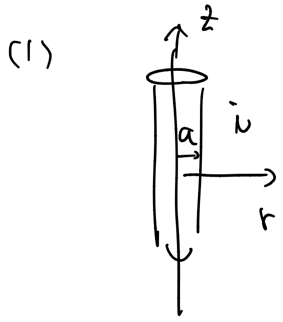
$= -18A + 18E + 12A - 12E$

$= -6A + 6E$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -6 \\ -12 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

物理学A

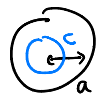
(1)



(i) アンペールの法則より.

(a) $r<a$ のとき.

電流 I は、 $I = i r^2 \pi$

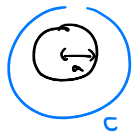


$$\oint_C B_\phi \, d\varphi = \mu_0 I.$$

$$2\cancel{\pi} \cancel{r} B_\phi = \mu_0 i r^{\cancel{2}} \cancel{\pi}$$

$$\therefore B_\phi = \frac{\mu_0 i r}{2}$$

(b) $a<r$ のとき



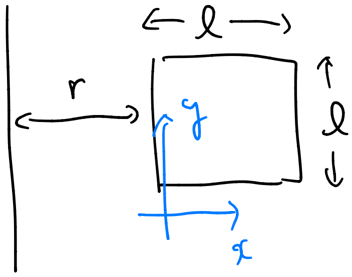
電流 $I = i a^2 \pi$

$$\oint_C B_\phi \, d\varphi = \mu_0 I$$

$$2\cancel{\pi} r B_\phi = \mu_0 i a^2 \cancel{\pi}$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 i a^2}{2r}$$

(ii)



$$\Phi = \int_0^l \int_r^{r+l} B_\phi \, dy \, dx$$

$$= \int_r^{r+l} \frac{\mu_0 i a^2}{2r} dx.$$

$$= \frac{\mu_0 i a^2}{2} \log \frac{r+l}{r}$$

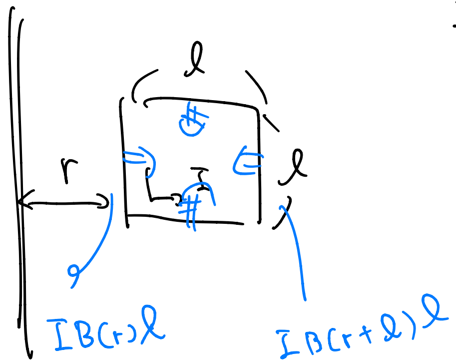
(iii) 生じる起電力 V は、

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 i a^2}{2}\left(\frac{1}{r+l} v_0 - \frac{1}{r} v_0\right)$$

$$= -\frac{\mu_0 i a^2 l v_0}{2r(r+l)}$$

その大きさ $|V|$ は $\dfrac{\mu_0 i a^2 l v_0}{2r(r+l)}$

(iv)



コイル全体に働く力は

$$IB(r)l - IB(r+l)l$$

$$= \frac{\mu_0 i a^2 I l}{2r} - \frac{\mu_0 i a^2 I l}{2(r+l)}$$

$$= \frac{\mu_0 i a^2 I l^2}{2r(r+l)}$$ //

力は動径方向（左向き）である。

(2) (i) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt}$$

$\frac{dx}{dt} = v$

$$= v\left(m\frac{dv}{dt} + kx\right) = 0$$ //

(ii) 運動方程式は $m\ddot{x} = -kx$ で与えられ、

この形の一般解は、

$$x = Ae^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + Be^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

$$v = i\sqrt{\frac{k}{m}}\left(-Ae^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + Be^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)$$

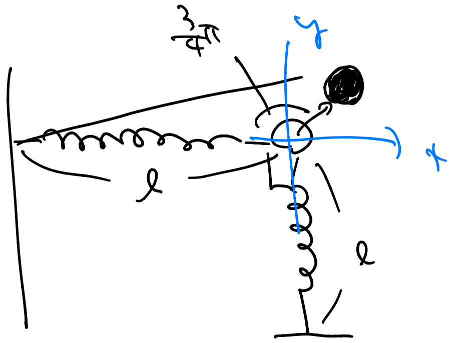
$v(0) = 0 \quad x(0) = a$ より

$$\left.\begin{array}{l} A + B = a \\ -A + B = 0 \end{array}\right\} \to A = B = \frac{a}{2}$$

よって $$x(t) = \frac{a}{2}\left(e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)$$

$$= a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$ //

(iii)



$r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと、

$$a^2 = l^2 + r^2 - 2lr\cos\frac{3}{4}\pi$$

$$= l^2 + r^2 + \sqrt{2}lr$$

なので

$$a - l = \sqrt{l^2 + r^2 + \sqrt{2}lr} - l.$$

(iv)

$$a - l = l\left(\underbrace{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{r}{l}}}_{*}\right) - l.$$

$*$ は. $\left(1 + \sqrt{2}\frac{r}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{r}{l}$

$$l - \frac{\sqrt{2}}{2}r - l = -\frac{\sqrt{2}}{2}r.$$

物理学B

(1)

(i)

(a) つり合いを考えると、$C_L u^2 = mg$.

$$\therefore\ u_H = \sqrt{\frac{mg}{C_L}}$$ //

(b) 運動方程式は、

$$m\ddot{z} = -mg + C_L \dot{z}^2$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g + \frac{C_L}{m}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$\frac{dz}{dt} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = -g + \frac{C_L}{m} w^2$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{C_L}{m}\left(w^2 - \frac{mg}{C_L}\right)$$

$$\frac{1}{\frac{C_L}{m}\left(w^2 - \frac{mg}{C_L}\right)} dw = dt.$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_L}{mg}}\,\frac{m}{C_L}}}\left\{\frac{1}{w + \sqrt{\frac{mg}{C_L}}} - \frac{1}{w - \sqrt{\frac{mg}{C_L}}}\right\} dw = dt$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{C_L g}}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{C_L g}}\log\frac{w + \sqrt{\frac{mg}{C_L}}}{w - \sqrt{\frac{mg}{C_L}}} = t$$