数学A

(1) (i) C^∞級の関数 $f(x)$ は $x=a$ まわりに次のようにテイラー展開することができる。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$x = a+\varepsilon$ とすると、

$$f(a+\varepsilon) = f(a) + f'(a)\varepsilon + \frac{f''(a)}{2!}\varepsilon^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\varepsilon^3 + \cdots$$

となる。第4項以降は ε は3次以上であるから、2次の精度であれば

$$f(a+\varepsilon) \approx f(a) + \varepsilon f'(a) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f(a)$$

で十分となる。//

(ii)
$$\cos(62^\circ) = \cos\left(62 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}\right)$$

(i)において $a = \pi/3$, $\varepsilon = \pi/90$ とすると、$\varepsilon^2 = \frac{\pi^2}{8100} \sim \frac{1}{900} \sim 0.0011..$ の精度で求めればよい。小数第3位まで求められる。

$$\cos(62^\circ) \approx \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{90}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{90}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{8100}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 0.8660254 - \frac{3.1415926}{180} - \frac{(3.1415926)^2}{16200}\cdot 0.8660254$$
$$= 0.8480\ldots \sim 0.848$$ //

(2) (i) $y' - y = 0$

$\therefore\ y = Ae^{x} + Be^{-x}$

(ii) $y'' + y' - 6y = 0$

$y = e^{\lambda x}$ とおくと、特性方程式：$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ が得られる。

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$
$(\lambda+3)(\lambda-2) = 0$ $\quad\therefore\ \lambda = -3, 2.$

よって $y = Ae^{-3x} + Be^{2x}$

(iii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

同様にして 特性方程式：$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ が得られる。$(\lambda-2)^2 = 0$

よって $y = Ae^{2x}$

特性方程式が重解のとき、$xe^{\lambda x}$ も解となるから、$y = (A+Bx)e^{2x}$ //

(3)

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} d\det|A-\lambda E| &= (1-\lambda)^3 + 12 - 4 - 4(1-\lambda) - 6(1-\lambda) + 2(1-\lambda) \\ &= 1 + 3\lambda^2 - 3\lambda - \lambda^3 + 8 - 8 + 8\lambda \\ &= 1 + 5\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 \\ &= -(\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda - 1) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda-(2+\sqrt{5}))(\lambda-(2-\sqrt{5})) \end{aligned}$$

ゆえに固有値は $-1,\ 2\pm\sqrt{5}$ の3つである。 //

(ii) 余因子展開で逆行列を求める。

$$|A| = 1 + 12 - 4 - \underbrace{(4+6-2)}_{=8} = 1$$

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

以上より

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ & \vdots & \\ \tilde{a}_{31} & & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 5 & -3 & -7 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Aの逆行列 A^{-1} は $A^{-1} = \tilde{A}^T$ より

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -2 & -3 & -2 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$ //