問題1

I (1) $m\ddot{\mathbb{R}}(t) = -\mathrm{grad}\,U$ で求められる（ただし、$\mathbb{R}(t) = (X, Y)$）

ゆえに、
$$\begin{cases} m\ddot{X} = -m\omega_0^2 X \\ m\ddot{Y} = -m\omega_0^2 Y \end{cases} \quad \text{—— (*)}$$

(2) (*)の形の微分方程式の一般解は、

$$X = Ae^{-i\omega_0 t} + Be^{i\omega_0 t}$$

$$Y = Ce^{-i\omega_0 t} + De^{i\omega_0 t}$$

であるので、

$$\dot{X} = i\omega_0(-Ae^{-i\omega_0 t} + Be^{i\omega_0 t})$$

$$\dot{Y} = i\omega_0(-Ce^{i\omega_0 t} + De^{i\omega_0 t})$$

ここで初期条件を代入すると、

$X = A + B = X_0$ $\qquad \dot{X} = i\omega_0(-A + B) = 0$

$Y = C + D = 0$ $\qquad \dot{Y} = i\omega_0(-C + D) = v_0$

ゆえに、
$$X(t) = \frac{X_0}{2}(e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}) = X_0 \cos\omega_0 t$$

$$Y(t) = \frac{v_0}{2i\omega_0}(-e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \quad //$$

II ~~(3)~~ 後で解く。

(4) 慣性系でのラグランジアンLは、

$$L = \frac{1}{2}m\mathbb{V}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2(X^2 + Y^2)$$

$X^2 + Y^2 \to x^2 + y^2$ であるから

座標変換をする。

$$\frac{1}{2}m\mathbb{V}^2 = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbb{r})^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left[|\boldsymbol{v}|^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbb{r}) + |\boldsymbol{\Omega}\times\mathbb{r}|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\Omega(\dot{y}x - \dot{x}y) + \frac{1}{2}m\Omega^2(x^2 + y^2)$$

よって、
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\Omega(\dot{y}x - \dot{x}y) + \frac{1}{2}m\Omega^2(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2) \quad //$$

(5) オイラー・ラグランジュ方程式を求める。

[x について]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} - m\Omega\dot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\Omega\dot{y} + m\Omega^2 x - m\omega_0^2 x$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - 2m\Omega\dot{y} - \underline{m\Omega^2 x} + m\omega_0^2 x = 0.$$

[y について]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} + m\Omega\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -m\Omega\dot{x} + m\Omega^2 y - m\omega_0^2 y$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + 2m\Omega\dot{x} - \underline{m\Omega^2 y} + m\omega_0^2 y = 0$$

であるから、〜〜 がコリオリの力，—— が遠心力に対応する。

(6) 加わる力は $q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = q(\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y)\times B\mathbf{e}_z$

$$= q(-\dot{x}B\mathbf{e}_y + \dot{y}B\mathbf{e}_x)$$

である。よって、

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + 2m\Omega\dot{y} + m\Omega^2 x + q\dot{y}B$$

$$m\ddot{y} = -m\omega_0^2 y - 2m\Omega\dot{x} + m\Omega^2 y - q\dot{x}B$$

$$〜〜 = \begin{cases} (2m\Omega + qB)\dot{y} \\ -(2m\Omega + qB)\dot{x} \end{cases} \qquad \therefore \ \Omega = -\frac{qB}{2m} \ //$$

(7) (6)より運動方程式は

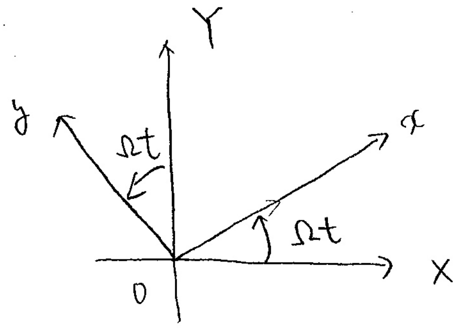
B^2 は無視.

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -(m\omega_0^2 - m\Omega^2)x \approx -m\omega_0^2 x \\ m\ddot{y} &= -(m\omega_0^2 - m\Omega^2)y. \approx -m\omega_0^2 y \end{aligned}\right\} \cdots (**)$$

(＊＊)より

$$\begin{cases} x = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t} \\ y = C e^{i\omega_0 t} + D e^{-i\omega_0 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = i\omega_0 \left(A e^{i\omega_0 t} - B e^{-i\omega_0 t} \right) \\ \dot{y} = i\omega_0 \left(C e^{i\omega_0 t} - D e^{-i\omega_0 t} \right) \end{cases}$$



また、左図のような関係があることから、

$$X = x \cos\Omega t - y \sin\Omega t$$

$$Y = x \sin\Omega t + y \cos\Omega t$$

がいえる。

$$\dot{X} = \dot{x}\cos\Omega t - x\Omega \sin\Omega t - \dot{y}\sin\Omega t - y\Omega\cos\Omega t$$

$$\dot{Y} = \dot{x}\sin\Omega t + x\Omega\cos\Omega t + \dot{y}\cos\Omega t - y\Omega\sin\Omega t$$

t=0を考えると、

$$\dot{X} = \dot{x} - y\Omega = i\omega_0(A-B) - (C+D)\Omega = v_0 \quad \cdots ①$$

$$\dot{Y} = x\Omega + \dot{y} = (A+B)\Omega + i\omega_0(C-D) = 0 \quad \cdots ②$$

②より $\begin{cases} A+B=0 \\ C=D \end{cases}$ がいえ ①に代入すると、

$$i\omega_0 \cdot 2A - 2C\Omega = v_0$$

。

また、 $X = A+B = 0$

$Y = C+D = 0$。

$$A = \frac{v_0}{2i\omega_0}$$

∴ $A = \dfrac{v_0}{2i\omega_0} = -B$, $C = D = 0$.

∴ $X = \dfrac{v_0}{2i\omega_0}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t\cos\Omega t$

$Y = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \sin\Omega t$

//

(8) $E_1 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 R^2$

運動方程式は、

$$\begin{cases} m\ddot{X} = -m\omega_0^2 X + q\dot{Y}B & \cdots ③ \\ m\ddot{Y} = -m\omega_0^2 Y - q\dot{X}B & \cdots ④ \end{cases}$$

③ + ④i より

$$m(\ddot{X} + i\ddot{Y}) = -m\omega_0^2(X + iY) - qBi(\dot{X} + i\dot{Y})$$

$X + iY = Re^{i\lambda t}$ とおくと、特性方程式：

$$-m\lambda^2 = -m\omega_0^2 + qB\lambda$$

が得られる。つまり $\lambda^2 + \frac{qB}{m}\lambda - \omega_0^2 = 0$.

$$\lambda = \frac{-\frac{qB}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{qB}{m}\right)^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(-\frac{qB}{m} + 2\omega_0\right)$$

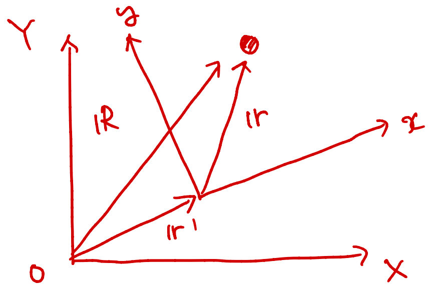
$$E_2 = \frac{1}{2} m R^2 \lambda^2 \simeq \frac{1}{2} m R^2 \frac{1}{4}\left(4\omega_0^2 - 4\omega_0 \frac{qB}{m} + \cancel{\left(\frac{qB}{m}\right)^2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m R^2 \omega_0^2}_{= E_1} - \frac{1}{4} R^2 \omega_0 qB$$

$$\therefore E_2 - E_1 = E_1 - \frac{1}{2} R^2 \omega_0 qB - E_1$$

$$= -\frac{1}{2} R^2 \omega_0 qB \quad //$$

II (3) について.



左図より

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \sum_i \left\{ \frac{dr_i}{dt} \mathbf{e}_i + r_i \underbrace{\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}}_{= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i} \right\}$$

$$= \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{dr_i}{dt} \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\Omega} \times r_i \mathbf{e}_i$$

$$= \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

いま $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ より.

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad //$$