$\boxed{\text{問題3}}$

I (1) $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}$

$= \frac{m\omega}{2\hbar}(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega})(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}) - \frac{m\omega}{2\hbar}(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega})(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega})$

$= \frac{m\omega}{2\hbar}(\cancel{\hat{x}^2} - \frac{i}{m\omega}[\hat{x}, \hat{p}] + \cancel{\hat{p}^2}) - \frac{m\omega}{2\hbar}(\cancel{\hat{x}^2} + \frac{i}{m\omega}[\hat{x}, \hat{p}] + \cancel{\hat{p}^2})$

$= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(-\frac{2i}{m\omega} \cdot i\hbar\right) = 1$ //

(2) $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle$

$= \hat{a}^\dagger\underbrace{(1 + \hat{a}^\dagger\hat{a})}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle$

$= \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle + \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle$

$= (\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle + \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^{n-2}|0\rangle$

$= \cdots = n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = n|n\rangle$

$\therefore \hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle$.

エネルギー固有値は $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$

II. (3) $\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n_1 + \frac{1}{2})|n_1\rangle + \hbar\omega(n_2 + \frac{1}{2})|n_2\rangle + \hbar\omega(n_3 + \frac{1}{2})|n_3\rangle$

$= \hbar\omega(n + \frac{3}{2})|n\rangle$.

$n = n_1 + n_2 + n_3$ より $E_n = \hbar\omega(n + \frac{3}{2})$

(4) $\hat{L}_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$ において $\varepsilon_{ijk} = 1$ $i \neq j \neq k$ とおると.

$\hat{L}_i = \hat{x}_j\hat{p}_k - \hat{x}_k\hat{p}_j$ となる。

$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$, $\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$

$$\sum_{i=1}^{3} [\hat{L}_i, [\hat{L}_i, \hat{a}_j^\dagger]] = \sum_{i=1}^{3} \left[-i\hbar \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k ,\ i\hbar \sum_{k'=1}^{3} \varepsilon_{ijk'} \hat{a}_{k'}^\dagger \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \hbar^2 \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \sum_{k'=1}^{3} \varepsilon_{ijk'} [\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger]$$

$$= \hbar^2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{k'=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk'} \hat{a}_j^\dagger \underbrace{[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger]}_{=\delta_{kk'}}$$

$$= \hbar^2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} \hat{a}_j^\dagger$$

$$= 2\hbar^2 \hat{a}_j^\dagger$$

(b). $E = E_1$ の固有値は $|1\rangle = \hat{a}_j^\dagger |0\rangle$ である。

$\sum_{i=1}^{3} \hat{L}_i^2 |1\rangle$ を求めればよい。

$$[\hat{L}_i, [\hat{L}_i, \hat{a}_j^\dagger]] = [\hat{L}_i, \hat{L}_i \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger \hat{L}_i]$$

$$= \hat{L}_i^2 \hat{a}_j^\dagger - \hat{L}_i \hat{a}_j^\dagger \hat{L}_i - \hat{L}_i \hat{a}_j^\dagger \hat{L}_i + \hat{a}_j^\dagger \hat{L}_i^2$$

$$= \hat{L}_i^2 \hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j^\dagger \hat{L}_i^2 - 2 \hat{L}_i \hat{a}_j^\dagger \hat{L}_i$$ なので

$(= 2\hbar^2 a_j^\dagger)$

$$\sum_{i=1}^{3} \hat{L}_i^2 |1\rangle = \sum_{i=1}^{3} \hat{L}_i^2 \hat{a}_j^\dagger |0\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{3} 2\hbar^2 a_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger \hat{L}_i^2 + 2 \hat{L}_i \hat{a}_j^\dagger \hat{L}_i |0\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{3} 2\hbar^2 a_j^\dagger |0\rangle$$

$\therefore\ l(l+1) = 2$ となる。ゆえに $l = 1$ //

以上より

$$\hat{L}_i = -\frac{i\hbar}{2}(\hat{a}_j+\hat{a}_j^\dagger)(\hat{a}_k-\hat{a}_k^\dagger) + \frac{i\hbar}{2}(\hat{a}_k+\hat{a}_k^\dagger)(\hat{a}_j-\hat{a}_j^\dagger)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2}(\cancel{\hat{a}_j\hat{a}_k} - \hat{a}_j\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k - \cancel{\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k^\dagger})$$

$$+\frac{i\hbar}{2}(\cancel{\hat{a}_k\hat{a}_j} - \hat{a}_k\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_j - \cancel{\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_j^\dagger})$$

$$= -\frac{i\hbar}{2}(\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k + \hat{a}_k\hat{a}_j^\dagger) + \frac{i\hbar}{2}(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_j + \hat{a}_j\hat{a}_k^\dagger)$$

$$= -i\hbar(\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k + \hat{a}_k\hat{a}_j^\dagger)$$

$$= -i\hbar(\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k - \hat{a}_j\hat{a}_k^\dagger) = -i\hbar(\hat{a}_j^\dagger a_k - \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_j) \qquad \therefore \hat{L}_i = \underbrace{\sum}_{-i\hbar}\varepsilon_{ijk}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k \quad //$$

可換なので

ここで状態 $|n\rangle = |n_1, n_2, n_3\rangle$ と表すと. $|0\rangle = |0,0,0\rangle$

$$\hat{L}_i|0\rangle = -i\hbar\sum_{i,j}\varepsilon_{ijk}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k|0,0,0\rangle = 0 \quad //$$

$$L_i^2|0\rangle = -\hbar^2(\hat{a}_j^\dagger a_k - \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_j)^2|0\rangle$$

$$= -\hbar^2\left\{\hat{a}_j^{\dagger 2}a_k^2 - \hat{a}_j^\dagger a_k\hat{a}_k^\dagger a_j - \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_j\hat{a}_j^\dagger a_k + \hat{a}_k^{\dagger 2}\hat{a}_j^2\right\}|0\rangle$$

$$= 0 \qquad \therefore \ l = 0$$

(5). $$[\hat{L}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \left[\overbrace{\sum_{k=1}^{3}}^{-i\hbar}\varepsilon_{ijk}\hat{a}_j^\dagger a_k, \hat{a}_j^\dagger\right]$$

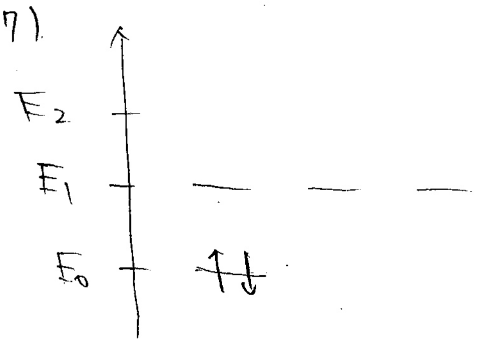
$$= -i\hbar\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}[\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k, \hat{a}_j^\dagger]$$

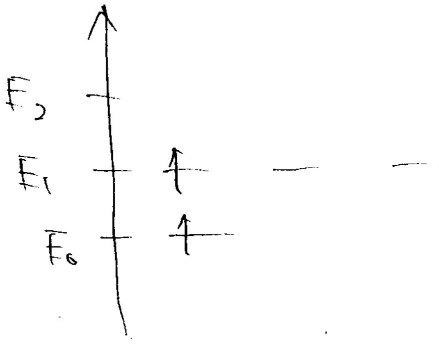
$$= +i\hbar\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}[\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger]$$

$$= i\hbar\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\hat{a}_k^\dagger[\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger]$$

$$= i\hbar\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\hat{a}_k^\dagger \quad //$$

Ⅲ (7)





基底状態

$$\begin{cases} E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega = 3\hbar\omega \\ E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{5}{2}\hbar\omega = 4\hbar\omega \end{cases}$$ //

(8)