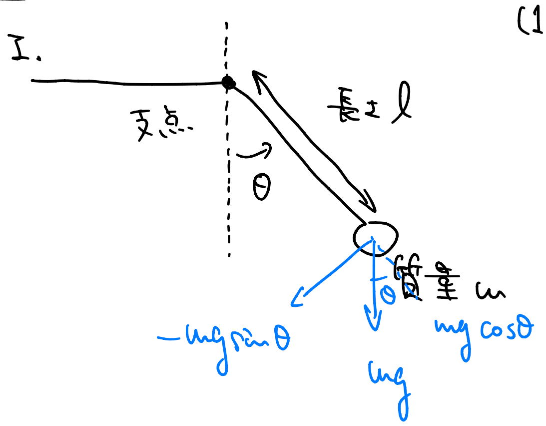
問題 1

I.



(1) $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$

ゆえに、微分方程式：

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

より $\theta = Ae^{-i\sqrt{g/l}\,t} + Be^{i\sqrt{g/l}\,t}$ がいえる。

また、$\dot{\theta} = -i\sqrt{g/l}\,Ae^{-i\sqrt{g/l}\,t} + i\sqrt{g/l}\,Be^{i\sqrt{g/l}\,t}$

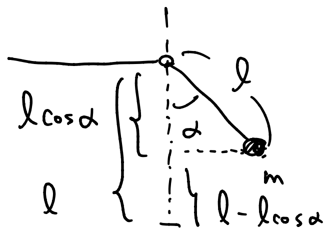
ここで初期条件 $t=0$ で $\theta=\alpha$ を代入すると、
（初速度 $t=0$ で $\dot{\theta}=0$ も加えて…）

$$\begin{cases} \alpha = A+B \\ 0 = -A+B \end{cases} \rightarrow \quad A = B = \alpha/2$$

よって、$\theta = \boxed{\dfrac{\alpha}{2}}\boxed{\left(e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right)}$ //

$= \alpha\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$

(2)



エネルギー保存則より

$$E = mgl(1-\cos\alpha) \approx mgl\left(1-1+\frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}mgl\alpha^2$$ //

(3) 動径方向のつり合いより $T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2$

(4) 振動の1周期に関して $\langle T\rangle$ を求める。

［解1］

$$T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 \approx mg\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right) + ml\dot{\theta}^2$$

ここで $\theta = \alpha\cos\omega t$，$\dot{\theta} = -\omega\alpha\sin\omega t$ より $\left(\omega := \sqrt{g/l}\right)$

$$= mg - \frac{mg}{2}\alpha^2\cos^2\omega t + ml\omega^2\alpha^2\sin^2\omega t$$

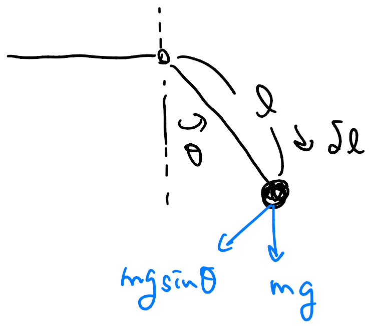
$$\langle T\rangle = mg - \frac{mg}{2}\alpha^2\underbrace{\langle\cos^2\omega t\rangle}_{=\frac{1}{2}} + ml\omega^2\alpha^2\underbrace{\langle\sin^2\omega t\rangle}_{=\frac{1}{2}}$$

$$= mg - \frac{mg}{4}\alpha^2 + \frac{1}{2}ml\omega^2\alpha^2 = mg - \frac{mg}{4}\alpha^2 + \frac{1}{2}m\cancel{l}\cdot\frac{g}{\cancel{l}}\alpha^2$$

$$= mg + \frac{1}{4}mg\alpha^2 = mg\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)$$ //

Ⅱ.

(5) 方位角方向の運動方程式は、



$$m l \ddot{\theta} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

↓

$$m(l+\delta l)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$
$$\approx -mg\theta$$

ゆえに、$\omega' = \sqrt{\frac{g}{l+\delta l}}$

ゆえに $\delta\omega = \omega' - \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} - \sqrt{\frac{g}{l+\delta l}} = \frac{\delta l}{2l}\sqrt{\frac{g}{l}}$ 〃

$$\left(\sqrt{\frac{g}{l+\delta l}} = \sqrt{g}\, l^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\boxed{\delta l}}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1-\frac{\delta l}{2l}\right) \right)$$

微小量なので

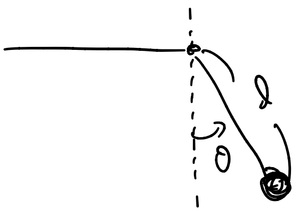
(6) $\delta W = -\langle T\rangle \delta l$

$$= -mg\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)\delta l$$

また、問題文より $\delta w = \delta E + \underline{\underline{\delta U}}$ 　単振り子全体としての下降・上昇に伴う位置エネルギーの変化量

なので $\delta E = \delta w - \delta U$

ここで δU は、$-mg\,\delta l(1-\cos\alpha)$ なので



$$\delta E = -mg\delta l - mg\frac{\alpha^2}{4}\delta l$$
$$+ \cancel{mg\delta l} - mg\,\delta l\,\underline{\cos\alpha}$$

$\cancel{1} - \frac{1}{2}\alpha^2$

$$= mg\,\delta l\left(1-\frac{1}{4}\alpha^2\right)$$ 〃

Answer.

$\delta U = -mg\,\delta l$

$$\delta E = \delta w - \delta U$$
$$= -\cancel{mg\delta l} - mg\frac{\alpha^2}{4}\delta l + \cancel{mg\delta l}$$
$$= -mg\frac{\alpha^2}{4}\delta l$$

(7)

$$\begin{cases} \delta\omega = \dfrac{\delta l}{2l}\sqrt{\dfrac{g}{l}} \\ \delta E = -mg\dfrac{\alpha^2}{4}\delta l \end{cases}$$

より $-\frac{\alpha^2}{4}mg\,\delta\omega = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\delta E$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}mgl\alpha^2}_{E}\,d\omega = \underbrace{\sqrt{\frac{g}{l}}}_{\omega}\,dE$$

∴ $-\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dE}{E} = \text{Const}$ でなければいけないので

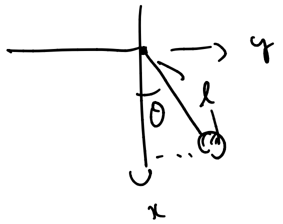
$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{E}{\omega} = \text{Const}$$ //

III

(8) 運動エネルギーTと、ポテンシャルエネルギーUは、

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2,\quad U = -mgl\cos\theta$$

[



$x = l\cos\theta$　　$\dot x = -l\sin\theta\cdot\dot\theta^2$

$y = l\sin\theta$　　$\dot y = l\cos\theta\cdot\dot\theta^2$.

]

なので Lagrangian は、$L = T - U$

$= \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + mgl\cos\theta$.

一般化運動量 $p = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ml^2\dot\theta \rightsquigarrow \dot\theta = \frac{p}{ml^2}$.

(9) 振り子のエネルギーEは、運動エネルギーとポテンシャルの和で表せるので

$$E = T + U = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 - mgl\cos\theta.$$

$\dot\theta = \frac{p}{ml^2}$ を代入して、Eをpとθで表す.

$$E = \frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{l^2}\cdot\frac{p^2}{m^{\cancel{2}}l^{\cancel{4}}{}_{2}} - mgl\cos\theta.$$

$$= \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

$$\approx \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right)$$

$$= \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{\theta^2}{2/mgl} - mgl.$$

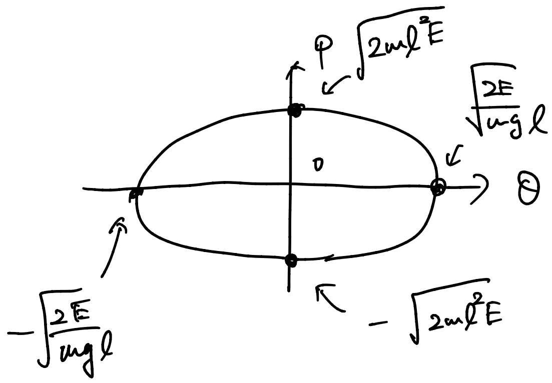
エネルギーの本質としては.

$$E = \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{\theta^2}{2/mgl}$$

でいいので.

これは.

$$1 = \frac{p^2}{2ml^2E} + \frac{\theta^2}{2E/mgl}$$



(10)

$\oint p\,d\theta =$ (楕円の面積) であるから.

$$\oint p\,d\theta = 2\pi\sqrt{\frac{2E}{\cancel{m}gl}}\cdot\sqrt{2\cancel{m}l^2E} = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{E}{\omega} = \text{const.}$$

よって Δl が変化しても $\oint p\,d\theta$ は変化しない.