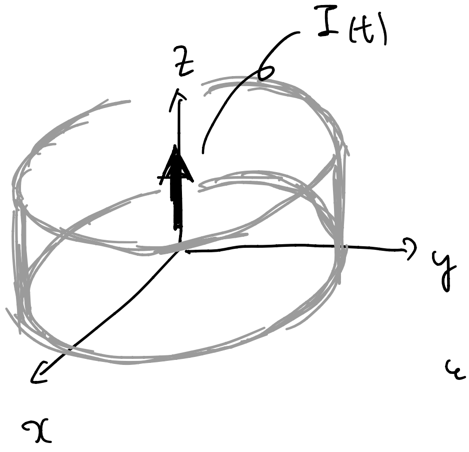
$\boxed{\text{大問2}}$

I.

(1)



アンペールの法則より

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 I$$

となるので

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

〃

(2) 左辺の単位ベクトルに注目して計算する。

$$(\hat{r} + \hat{\phi} + \hat{z}) \times \hat{\phi} = \underbrace{\hat{r} \times \hat{\phi}}_{\hat{z}} + \underbrace{\hat{z} \times \hat{\phi}}_{-\hat{r}}$$

となる。右辺にも電流ベクトルは $\hat{z}$ の成分をもつので電場は、$\hat{r}$ の成分を持つ必要がある。

ゆえに、$-\oslash\,\hat{r} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ より、$\mathbf{E} = -\oslash\,\hat{r}$

となるべきで動径方向負の向きに電場はできる。

II、

(3) $$\begin{rcases} \mathbb{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbb{A} & \left(\begin{array}{l} \text{ただし} \\ \nabla\cdot\mathbb{A} = 0 \end{array}\right) \\ \mathbb{B} = \nabla\times\mathbb{A} & \end{rcases} \text{より}$$

(i) について.

$$\nabla\cdot -\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbb{A}) = 0$$

$\longrightarrow$ 満たしている.

(ii) について.

$$\nabla\times\left(-\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbb{A}) = -\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}$$

$\longrightarrow$ 満たしている

(iii) について.

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{A}) = 0$$

$\longrightarrow$ 満たしている.

(4) (iv) にベクトルポテンシャルを代入する。

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbb{A}) = \mu_0\,\mathbb{j}(\mathbb{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A}\right)$$

$$\underbrace{\nabla(\nabla\cdot\mathbb{A})}_{=0} - \nabla^2\mathbb{A} = \mu_0\,\mathbb{j}(\mathbb{r},t) - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{A}.$$

$$\therefore\ \left(\nabla^2 - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{A} = -\mu_0\,\mathbb{j}(\mathbb{r},t)$$

$$\therefore\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{A} = -\mu_0\,\mathbb{j}(\mathbb{r},t)$$ //

III

(5) $$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dx'dy'dz' \frac{\mathbb{J}\left(\mathbb{r}', t - \frac{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}{c}\right)}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}$$

$$\mathbb{J}(\mathbb{r}', t) = I(t)\,\delta(x')\,\delta(y')\,\hat{z}$$
$$= I\,\Theta(t)\,\delta(x')\,\delta(y')\,\hat{z}$$

$$\Theta(t) := \begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t>0) \end{cases}$$

$$|\mathbb{r}-\mathbb{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}$$

なので $$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dz' \frac{I\,\Theta\left(t - \frac{\sqrt{r^2+z'^2}}{c}\right)\hat{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z'^2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dz' \frac{I\,\Theta\left(t - \frac{\sqrt{r^2+z'^2}}{c}\right)\hat{z}}{\sqrt{r^2+z'^2}}$$

(a) $r > ct$ のとき。

$ct < r < \sqrt{r^2+z'^2}$ であるから。 $t - \frac{\sqrt{r^2+z'^2}}{c} < 0$ より

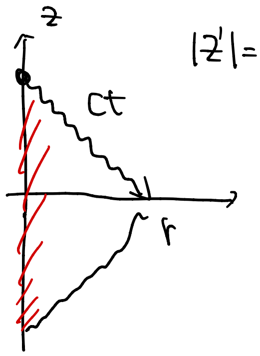
$\Theta = 0$ より $\mathbb{A} = 0$

(b) $0 < r < ct$ のとき。

$ct > \sqrt{r^2+z'^2} > r$ であり。 $t - \frac{\sqrt{r^2+z'^2}}{c} > 0$ がいえる。

$\Theta = 1$ より

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dz' \frac{I\hat{z}}{\sqrt{r^2+z'^2}}$$



$|z'| = \sqrt{(ct)^2 - r^2}$ なので

$$\frac{z'}{ct} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{ct}\right)^2} = F$$

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-Fct}^{Fct} dz' \frac{I\hat{z}}{\sqrt{r^2+z'^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\hat{z}\left[\log\left(z' + \sqrt{z'^2+r^2}\right)\right]_{-Fct}^{Fct}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \log\left|\frac{Fct + \sqrt{(Fct)^2+r^2}}{-Fct+\sqrt{(Fct)^2+r^2}}\right| \hat{z}$$

(6) (a)の場合、$\mathbb{B} = 0$

(b)

$$\nabla \times \mathbb{A} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\boxed{\frac{\partial A_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial A_y}{\partial z}}\right)\hat{x} + \left(\cancel{\frac{\partial A_x}{\partial z}} - \boxed{\frac{\partial A_z}{\partial x}}\right)\hat{y} + \cancel{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}}$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{x} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{y}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_z}{\partial r}\underbrace{\boxed{\frac{\partial r}{\partial y}}}_{=\frac{y}{r}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\left\{\frac{r\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{Fct+\sqrt{(Fct)^2+r^2}} - \frac{r\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{-Fct+\sqrt{(Fct)^2+r^2}}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I y}{2\cancel{4}\pi}\left\{\frac{-\cancel{2}Fct\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{r^2}\right\}$$

$$= \frac{-\mu_0 I y Fct\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{2\pi r^2}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{-\mu_0 I x Fct\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{2\pi r^2}.$$

$$\hat{x} = \frac{x}{r}\hat{r} - \frac{y}{r}\hat{\phi}$$

$$\frac{y}{r}\hat{r} + \frac{x}{r}\hat{\phi} = \hat{y}$$

いま、$\mathbb{B} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{x} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{y}$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial y}\left(\cancel{\frac{x}{r}\hat{r}} - \frac{y}{r}\hat{\phi}\right) - \frac{\partial A_z}{\partial x}\left(\cancel{\frac{y}{r}\hat{r}} + \frac{x}{r}\hat{\phi}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I \cancel{r^2} Fct\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{2\pi r^{\cancel{3}}} = \frac{\mu_0 I Fct}{2\pi r\{(Fct)^2+r^2\}^{\frac{1}{2}}}\hat{\phi}$$

(7) $$\mathbb{B} = \frac{\mu_0 I F c}{2\pi r \left\{ (Fc)^2 + \left(\frac{r}{t}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \hat{\phi}$$

$$\xrightarrow[\substack{t\to\infty \\ F\to 1}]{} \frac{\mu_0 I c}{2\pi r c} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$