大問4

I (1) $Z_1 = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$

また、それぞれの粒子は独立であることから.

$$
\begin{aligned}
Z &= Z_1^{\,N} \\
&= \left\{ \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \right\}^N \\
&= \left( 2\cosh\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)^N
\end{aligned}
$$

$-\beta\varepsilon$

$\exp(-\beta\varepsilon)$ $\log$ $-\frac{\partial}{\beta}$

(2) 系の内部エネルギーは.

$$
E = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} \quad \left( ただし、便宜的に\ \beta = \frac{1}{k_B T} \right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= -N \frac{\partial \log 2\cosh\beta\varepsilon}{\partial \beta} \\
&= -N \frac{\cancel{2}\sin\beta\varepsilon}{\cancel{2}\cosh\beta\varepsilon} \cdot \varepsilon \\
&= -N\varepsilon \tan\frac{\varepsilon}{k_B T}
\end{aligned}
$$

(3) 系の比熱 $C$ は.

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial E}{\partial \beta} \\
&= -\frac{1}{k_B T^2} \cdot \left( -N\varepsilon \frac{\varepsilon}{\cosh^2\frac{\varepsilon}{k_B T}} \right) \\
&= N k_B \left( \frac{\varepsilon}{k_B T} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2 \varepsilon/k_B T} \quad //
\end{aligned}
$$

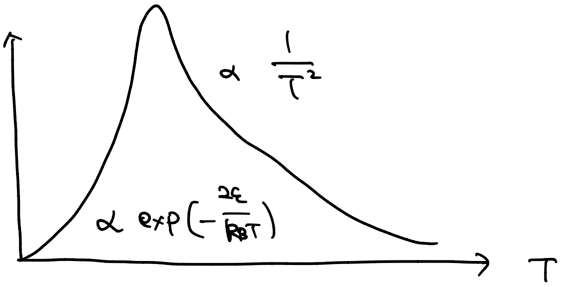
$T \to 0$ のとき、$\cosh\frac{\varepsilon}{k_B T} \sim \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{2}$ なので

$$
\begin{aligned}
C &\sim N k_B \cdot \left( \frac{\varepsilon}{k_B T} \right)^2 \cdot \left( \frac{2}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} \right)^2 \\
&= \frac{4N\varepsilon^2}{k_B T^2} \exp\left( -\frac{2\varepsilon}{k_B T} \right)
\end{aligned}
$$

$T \to \infty$ のとき、$\cosh\frac{\varepsilon}{k_B T} \sim 1$ なので

$$
C \sim N k_B \cdot \left( \frac{\varepsilon}{k_B T} \right)^2 = \frac{N\varepsilon^2}{k_B T^2}.
$$

以上より




II

(4) $-\mu H$ の固有状態がでる確率は、$\dfrac{\exp\left(\frac{\mu H}{k_BT}\right)}{\exp\left(\frac{\mu H}{k_BT}\right)+\exp\left(-\frac{\mu H}{k_BT}\right)}$

であるから、

$$N_\uparrow = \frac{N\exp\left(\frac{\mu H}{k_BT}\right)}{\exp\left(\frac{\mu H}{k_BT}\right)+\exp\left(-\frac{\mu H}{k_BT}\right)}$$

同様に、

$$N_\downarrow = \frac{N\exp\left(-\frac{\mu H}{k_BT}\right)}{\exp\left(\frac{\mu H}{k_BT}\right)+\exp\left(-\frac{\mu H}{k_BT}\right)}$$

(5) 磁化Mは、各粒子の磁気モーメントの総和であるから、

$$M = \mu N_\uparrow - \mu N_\downarrow$$

$$= \mu N \boxed{\frac{\left\{\exp\left(\frac{\mu H}{k_BT}\right)-\exp\left(-\frac{\mu H}{k_BT}\right)\right\}}{\exp\left(\frac{\mu H}{k_BT}\right)+\exp\left(-\frac{\mu H}{k_BT}\right)}} = \tanh\frac{\mu H}{k_BT}$$

$$= \mu H \tanh\frac{\mu H}{k_BT} \quad //$$

(6) 分配関数 $Z = \left(2\cosh\frac{\mu H}{k_BT}\right)^N$ で、

自由ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_BT\log Z$ より、

$$F = -k_BTN\log 2\cosh\frac{\mu H}{k_BT}$$

また、エントロピー S は

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left\{k_BTN\log 2\cosh\frac{\mu H}{k_BT}\right\}$$

$$= k_BN\log 2\cosh\frac{\mu H}{k_BT} + \cancel{k_BT}N\cdot\frac{\cancel{2}\sinh\frac{\mu H}{k_BT}}{\cancel{2}\cosh\frac{\mu H}{k_BT}}\cdot\frac{\mu H}{\cancel{k_B}}\cdot\left(-\frac{1}{T^{\cancel{2}}}\right)$$

$$= k_BN\log 2\cosh\frac{\mu H}{k_BT} - \frac{\mu HN}{T}\tan\frac{\mu H}{k_BT}$$

$$= k_BN\left\{\log 2\cosh\frac{\mu H}{k_BT} - \frac{\mu H}{k_BT}\tan\frac{\mu H}{k_BT}\right\} \quad /$$

(7) 断熱変化のとき $S=$ 一定であるから。

$$S = k_B N \left\{ \log 2\cosh \boxed{\frac{\mu H}{k_B T}} - \boxed{\frac{\mu H}{k_B T}} \tanh \boxed{\frac{\mu H}{k_B T}} \right\}$$

$\boxed{\phantom{x}}$ が一定となるには。HとTは比例の関係でなければならず。
Hが弱めると。Tは同様に小さくなるといえる。

つまり。Hが $\frac{1}{10}$ となると。Tも $\frac{1}{10}$ となる。

III (8) 1粒子について考える。

$$Z_1 = 1 + \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right)$$

これが独立に存在するのだから，分配関数 $Z$ は。

$$Z = Z_1^N = \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right) \right\}^N$$

(9) ヘルムホルツの自由エネルギー $F$ は。

$$F = -k_B T \log Z$$

$$= -k_B T N \underline{\underline{\log\left(1 + \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right)\right)}}$$

ここで

(i) $k_B T \ll \varepsilon_1 (\ll \varepsilon_2)$ のとき $\underline{\underline{\phantom{xx}}} \sim \log 1$

$F \sim 0$ ゆえに エントロピー $S \sim 0$

(ii) $\varepsilon_1 \ll k_B T \ll \varepsilon_2$ のとき。 $\underline{\underline{\phantom{xx}}} \sim \log 2$

$F \sim -k_B T N \log 2 \quad \therefore S = k_B N \log 2$

(iii) $k_B T \gg \varepsilon_2 \ (\gg \varepsilon_1)$ のとき $\underline{\underline{\phantom{xx}}} \sim \log 3$

$\rightarrow 1 \gg \frac{\varepsilon_2}{k_B T} \gg \frac{\varepsilon_1}{k_B T} \rightarrow 0$

$F \sim -k_B T N \log 3 \quad \therefore S = k_B N \log 3$

(9)をできれば使いたいけど
使うと概形が分からな…

(10) エネルギーEは、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ として、

$$E = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$$

$$= -N \frac{\partial}{\partial \beta} \log \{ 1 + \exp(-\beta \varepsilon_1) + \exp(-\beta \varepsilon_2) \}$$

$$= N \frac{\varepsilon_1 \exp(-\beta \varepsilon_1) + \varepsilon_2 \exp(-\beta \varepsilon_2)}{1 + \exp(-\beta \varepsilon_1) + \exp(-\beta \varepsilon_2)}$$

$\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ より

$$\simeq N \frac{\varepsilon_1 \exp(-\beta \varepsilon_1)}{1 + \exp(-\beta \varepsilon_1)} \simeq \frac{N \varepsilon_1}{\exp(\beta \varepsilon_1) + 1}$$

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial E}{\partial \beta}$$

$$= + \frac{1}{k_B T^2} N \varepsilon_1 \frac{1}{(\exp(\beta \varepsilon_1) + 1)^2} \cdot \varepsilon_1 \exp(\beta \varepsilon_1)$$

$$= k_B N \left( \frac{\varepsilon_1}{k_B T} \right)^2 \frac{\exp(\beta \varepsilon_1)}{(\exp(\beta \varepsilon_1) + 1)^2}$$

$$= \frac{1}{\exp(\beta \varepsilon_1) + 2 + \exp(-\beta \varepsilon_1)}$$

(i) $T \to 0$ のとき $\beta \to \infty$

$$C \sim k_B N \left( \frac{\varepsilon_1}{k_B T} \right)^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right)$$

(ii) $T \to \infty$ のとき $\beta \to 0$

$$C \sim k_B N \left( \frac{\varepsilon_1}{k_B T} \right)^2$$