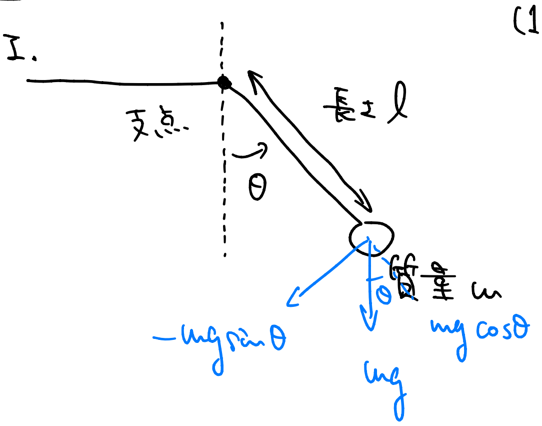
大阪大学大学院

物理学専攻 2019

問題 1

I.



(1) $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$

ゆえに、微分方程式：

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

より $\theta = Ae^{-i\sqrt{g/l}\,t} + Be^{i\sqrt{g/l}\,t}$ がいえる。

また、$\dot{\theta} = -i\sqrt{g/l}\,Ae^{-i\sqrt{g/l}\,t} + i\sqrt{g/l}\,Be^{i\sqrt{g/l}\,t}$

ここで初期条件 $t=0$ で $\theta=\alpha$ を代入すると。

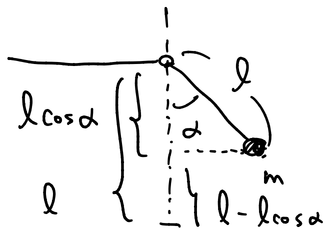
（初速度 $t=0$ で $\dot{\theta}=0$ も加えて…）

$$\begin{cases} \alpha = A+B \\ 0 = -A+B \end{cases} \rightarrow \quad A=B=\alpha/2$$

よって、$\theta = \boxed{\frac{\alpha}{2}}\boxed{\left(e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right)}$

$= \alpha\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$ //

(2)



エネルギー保存則より

$$E = mgl(1-\cos\alpha) \approx mgl\left(1-\left(1-\tfrac{1}{2}\alpha^2\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}mgl\alpha^2$$ //

(3) 動径方向のつり合いより $T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2$

(4) 振動の1周期に関して $\langle T\rangle$ を求める。

［解1］

$$T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 \approx mg\left(1-\tfrac{1}{2}\theta^2\right) + ml\dot{\theta}^2$$

ここで $\theta = \alpha\cos\omega t$，$\dot{\theta} = -\omega\alpha\sin\omega t$ より　$\left(\omega := \sqrt{g/l}\right)$

$$= mg - \frac{mg}{2}\alpha^2\cos^2\omega t + ml\omega^2\alpha^2\sin^2\omega t$$

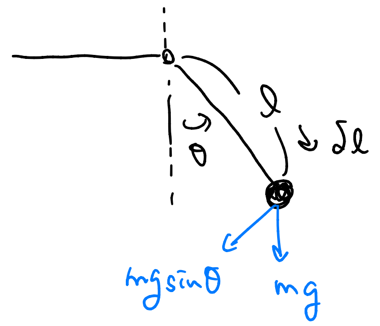
$$\langle T\rangle = mg - \frac{mg}{2}\alpha^2\underbrace{\langle\cos^2\omega t\rangle}_{=\frac{1}{2}} + ml\omega^2\alpha^2\underbrace{\langle\sin^2\omega t\rangle}_{=\frac{1}{2}}$$

$$= mg - \frac{mg}{4}\alpha^2 + \frac{1}{2}ml\omega^2\alpha^2 = mg - \frac{mg}{4}\alpha^2 + \frac{1}{2}m\cancel{l}\cdot\frac{g}{\cancel{l}}\alpha^2$$

$$= mg + \frac{1}{4}mg\alpha^2 = mg\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)$$ //

II.

(5) 方位角方向の運動方程式は、



$$m l \ddot{\theta} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

↓

$$m(l+\delta l)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$
$$\approx -mg\theta$$

ゆえに、$\omega' = \sqrt{\dfrac{g}{l+\delta l}}$

ゆえに $\delta\omega = \omega' - \omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}} - \sqrt{\dfrac{g}{l+\delta l}} = \dfrac{\delta l}{2l}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ //

$$\left(\sqrt{\frac{g}{l+\delta l}} = \sqrt{g}\, l^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\boxed{\delta l}}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 - \frac{\delta l}{2l}\right) \right)$$

微小量なので

(6) $\delta W = -\langle T \rangle \delta l$

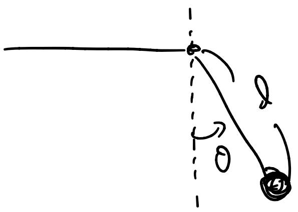
$$= -mg\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)\delta l$$

単振り子全体としての下降・上昇に伴う位置エネルギーの変化量

また、問題文より $\delta w = \delta E + \underline{\delta U}$

なので $\delta E = \delta w - \delta U$

ここで δU は、$-mg\,\delta l(1-\cos\alpha)$ なので



$$\delta E = -mg\delta l - mg\frac{\alpha^2}{4}\delta l + \cancel{mg\delta l} - mg\delta l\, \underline{\cos\alpha}$$

$\approx \cancel{1} - \frac{1}{2}\alpha^2$

$$= mg\delta l\left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right)$$ //

Answer.

$\delta U = -mg\delta l$

$$\delta E = \delta w - \delta U$$
$$= -\cancel{mg\delta l} - mg\frac{\alpha^2}{4}\delta l + \cancel{mg\delta l}$$
$$= -mg\frac{\alpha^2}{4}\delta l$$

(7)

$$\begin{cases} \delta\omega = \dfrac{\delta l}{2l}\sqrt{\dfrac{g}{l}} \\ \delta E = -mg\dfrac{\alpha^2}{4}\delta l \end{cases}$$

より

$$-\frac{\alpha^2}{4}mg\,\delta\omega = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\delta E$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}mgl\alpha^2}_{E}\,d\omega = \underbrace{\sqrt{\frac{g}{l}}}_{\omega}\,dE$$

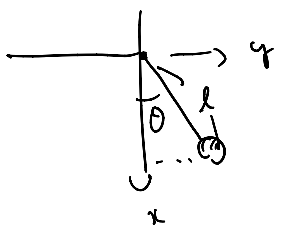
$\therefore\ -\dfrac{d\omega}{\omega} = \dfrac{dE}{E} = \text{const}$ でなければいけないので

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{E}{\omega} = \text{const} \quad //$$

III

(8) 運動エネルギーTと、ポテンシャルエネルギーUは、

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2,\quad U = -mgl\cos\theta$$



$$\begin{aligned} x &= l\cos\theta & \dot x &= -l\sin\theta\cdot\dot\theta^2 \\ y &= l\sin\theta & \dot y &= l\cos\theta\cdot\dot\theta^2 \end{aligned}$$

なので Lagrangian は、

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + mgl\cos\theta. \end{aligned}$$

一般化運動量 $p = \dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ml^2\dot\theta \ \leadsto\ \dot\theta = \dfrac{p}{ml^2}$.

(9) 振り子のエネルギーEは、運動エネルギーとポテンシャルの和で表せるので

$$E = T + U = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 - mgl\cos\theta.$$

$\dot\theta = \dfrac{p}{ml^2}$ を代入して、Eをpとθで表す。

$$E = \frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{l^2}\cdot\frac{p^2}{m^{\cancel{2}}l^{\cancel{4}}{}_2} - mgl\cos\theta.$$

$$= \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

$$\approx \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)$$

$$= \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{\theta^2}{2/mgl} - mgl.$$

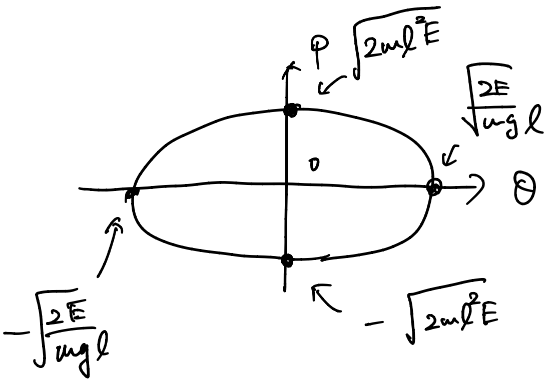
エネルギーの本質としては.

$$E = \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{\theta^2}{2/mgl}$$

であるので.

これは.

$$1 = \frac{p^2}{2ml^2 E} + \frac{\theta^2}{2E/mgl}$$



(10)

$\oint p\,d\theta$ = (楕円の面積) であるから.

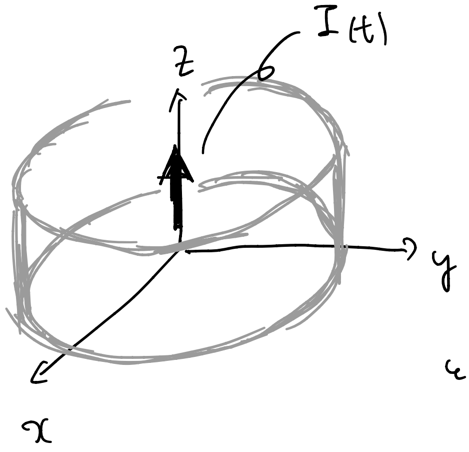
$$\oint p\,d\theta = 2\pi\sqrt{\frac{2E}{\cancel{m}g\cancel{l}}}\cdot\sqrt{2\cancel{m}l^{\cancel{2}}E} = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{E}{\omega} = \mathrm{const}.$$

すなわち Δl が変化しても $\oint p\,d\theta$ は変化しない.

大問2

I.

(1)



アンペールの法則より

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 I$$

となるので

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}$$ //

(2) 左辺の単位ベクトルに注目して計算する。

$$(\hat{r}+\hat{\phi}+\hat{z})\times\hat{\phi} = \underbrace{\hat{r}\times\hat{\phi}}_{\hat{z}} + \underbrace{\hat{z}\times\hat{\phi}}_{-\hat{r}}$$

となる。右辺にも電流ベクトルは $\hat{z}$ の成分をもつので電場は、$\hat{r}$ の成分を持つ必要がある。

ゆえに、$-\cancel{\bigcirc}\,\hat{r} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ より $\mathbf{E} = -\cancel{\bigcirc}\,\hat{r}$

となるべきで動径方向負の向きに電場はできる。

II.

(3)
$$\mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A}, \quad \mathbb{B} = \nabla\times\mathbb{A} \quad \left(\text{ただし } \nabla\cdot\mathbb{A} = 0\right)$$ より

(i) について.

$$\nabla\cdot -\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbb{A}) = 0$$

$\longrightarrow$ 満たしている.

(ii) について.

$$\nabla\times\left(-\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbb{A}) = -\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}$$

$\longrightarrow$ 満たしている

(iii) について.

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{A}) = 0$$

$\longrightarrow$ 満たしている.

(4) (iv) にベクトルポテンシャルを代入する.

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbb{A}) = \mu_0\,\mathbb{j}(\mathbb{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A}\right)$$

$$\underbrace{\nabla(\nabla\cdot\mathbb{A})}_{=0} - \nabla^2\mathbb{A} = \mu_0\,\mathbb{j}(\mathbb{r},t) - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{A}.$$

$$\therefore \left(\nabla^2 - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{A} = -\mu_0\,\mathbb{j}(\mathbb{r},t)$$

$$\therefore \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{A} = -\mu_0\,\mathbb{j}(\mathbb{r},t) \quad //$$

III

(5) $$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dx' dy' dz' \frac{\mathbb{J}(\mathbb{r}', t - \frac{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}{c})}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}$$

$$\mathbb{J}(\mathbb{r}', t) = I(t)\,\delta(x')\,\delta(y')\,\hat{z}$$
$$= I\,\theta(t)\,\delta(x')\,\delta(y')\,\hat{z}$$

$$\theta(t) := \begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t>0) \end{cases}$$

$$|\mathbb{r}-\mathbb{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}$$

なので $$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dz' \frac{I\,\theta(t - \frac{\sqrt{r^2+z'^2}}{c})\,\hat{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z'^2}}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dz' \frac{I\,\theta(t - \frac{\sqrt{r^2+z'^2}}{c})\,\hat{z}}{\sqrt{r^2+z'^2}}$$

(a) $r > ct$ のとき.

$ct < r < \sqrt{r^2+z'^2}$ であるから. $t - \frac{\sqrt{r^2+z'^2}}{c} < 0$ より

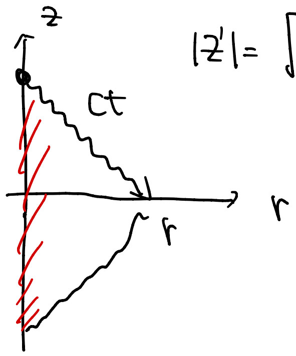
$\theta = 0$ より $\mathbb{A} = 0$

(b) $0 < r < ct$ のとき.

$ct > \sqrt{r^2+z'^2} > r$ であり. $t - \frac{\sqrt{r^2+z'^2}}{c} > 0$ がいえる.

$\theta = 1$ より

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dz' \frac{I\hat{z}}{\sqrt{r^2+z'^2}}$$



$|z'| = \sqrt{(ct)^2 - r^2}$ なので

$$\frac{z'}{ct} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{ct}\right)^2} = F$$

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-Fct}^{Fct} dz' \frac{I\hat{z}}{\sqrt{r^2+z'^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\hat{z}\left[\log\left(z'+\sqrt{z'^2+r^2}\right)\right]_{-Fct}^{Fct}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \log\left|\frac{Fct+\sqrt{(Fct)^2+r^2}}{-Fct+\sqrt{(Fct)^2+r^2}}\right| \hat{z}$$

(6) (a) の場合、 $\mathbb{B} = 0$

(b) $$\nabla \times \mathbb{A} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\boxed{\frac{\partial A_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial A_y}{\partial z}}\right)\hat{x} + \left(\cancel{\frac{\partial A_x}{\partial z}} - \boxed{\frac{\partial A_z}{\partial x}}\right)\hat{y} + \cancel{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}\hat{z}$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{x} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{y}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_z}{\partial r}\boxed{\frac{\partial r}{\partial y}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left\{\frac{r\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{Fct+\sqrt{(Fct)^2+r^2}} - \frac{r\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{-Fct+\sqrt{(Fct)^2+r^2}}\right\}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I y}{{}_2\cancel{4}\pi}\left\{\frac{-\cancel{4}Fct\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{r^2}\right\}$$

$$= \frac{-\mu_0 I y Fct\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{2\pi r^2}$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{-\mu_0 I x Fct\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{2\pi r^2}.$$

$$\hat{x} = \frac{x}{r}\mathbb{r} - \frac{y}{r}\phi$$

$$\frac{y}{r}\mathbb{r} + \frac{x}{r}\phi = \hat{y}$$

いま. $$\mathbb{B} = \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{x} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{y}$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial y}\left(\cancel{\frac{x}{r}\mathbb{r}} - \frac{y}{r}\hat{\phi}\right) - \frac{\partial A_z}{\partial x}\left(\cancel{\frac{y}{r}\mathbb{r}} + \frac{x}{r}\hat{\phi}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I \cancel{r} Fct\{(Fct)^2+r^2\}^{-\frac{1}{2}}}{2\pi r^{\cancel{3}}} = \frac{\mu_0 I Fct}{2\pi r\{(Fct)^2+r^2\}^{\frac{1}{2}}}\hat{\phi}$$

(7) $\mathbb{B} = \dfrac{\mu_0 I F c}{2\pi r \left\{ (Fc)^2 + \left(\frac{r}{t}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \hat{\phi}$

$\xrightarrow[\substack{t \to \infty \\ F \to 1}]{} \dfrac{\mu_0 I c}{2\pi r c} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ //

大問3

I (1) $\dfrac{\hat{L}_\pm}{\hbar}|L, m_L\rangle = \sqrt{L(L+1) - m_L(m_L \pm 1)}\ |L, m_L \pm 1\rangle$ より

$$\frac{\hat{L}_-}{\hbar}|1,1\rangle = \sqrt{2}\,|1,0\rangle$$

$$\frac{\hat{L}_-}{\hbar}|1,0\rangle = \sqrt{3}\,|1,-1\rangle$$

$$\frac{\hat{L}_-}{\hbar}|1,-1\rangle = 0$$

$$\frac{\hat{S}_-}{\hbar}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\frac{\hat{S}_-}{\hbar}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = 0$$

(2)
$$\frac{\hat{J}_-}{\hbar}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{3}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\frac{\hat{J}_-}{\hbar}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{\hat{L}_- + \hat{S}_-}{\hbar}\left|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$= \frac{\hat{L}_-}{\hbar}\left|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{\hat{S}_-}{\hbar}\left|1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$= \sqrt{2}\left|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

以上より

$$\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

(3) $J=\frac{1}{2}$ のとき、$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \alpha\left|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \beta\left|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ とすれば $\alpha^2+\beta^2=1$ を満たし、直交条件より

$$\left\langle\frac{3}{2},\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha\,\overset{1}{\underline{\left\langle 1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\beta\,\underbrace{\left\langle 1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle}_{1} = 0$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\beta = 0$$

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha+\sqrt{\frac{1}{3}}\beta=0 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{aligned} &\beta=-\sqrt{2}\alpha \\ &\alpha^2+2\alpha^2=1 \\ &3\alpha^2=1 \end{aligned} \qquad \alpha^2=\frac{1}{3} \quad \alpha=\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \beta=-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

以上より

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\left|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\left|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

//

(4) (3)と同様に、

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\alpha\left|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\beta\left|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\alpha-\sqrt{\frac{2}{3}}\beta=0$$

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=1 \\ \sqrt{\frac{1}{3}}\alpha-\sqrt{\frac{2}{3}}\beta=0 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{aligned} &\alpha=\sqrt{2}\beta \\ &2\beta^2+\beta^2=1 \end{aligned} \qquad \alpha=\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \beta=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\left|1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

大問4

I (1) $z_1 = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_BT}\right) + \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)$

また、それぞれの粒子は独立であることから.

$$
\begin{aligned}
Z &= z_1^N \\
&= \left\{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_BT}\right) + \exp\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)\right\}^N \\
&= \left(2\cosh\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^N
\end{aligned}
$$

$-\beta\varepsilon$

$\exp(-\beta\varepsilon)$ $\log$ $-\frac{\partial}{\beta}$

(2) 系の内部のエネルギーは.

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} \quad \left(\text{ただし、便宜的に } \beta = \frac{1}{k_BT}\right) \\
&= -N\frac{\partial \log 2\cosh\beta\varepsilon}{\partial\beta} \\
&= -N\frac{2\sinh\beta\varepsilon}{2\cosh\beta\varepsilon}\cdot\varepsilon \\
&= -N\varepsilon\tanh\frac{\varepsilon}{k_BT}
\end{aligned}
$$

(3) 系の比熱 C は.

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\partial\beta}{\partial T}\frac{\partial E}{\partial\beta} \\
&= -\frac{1}{k_BT^2}\cdot\left(-N\varepsilon\frac{\varepsilon}{\cosh^2\frac{\varepsilon}{k_BT}}\right) \\
&= Nk_B\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^2\frac{1}{\cosh^2 \varepsilon/k_BT} \quad //
\end{aligned}
$$

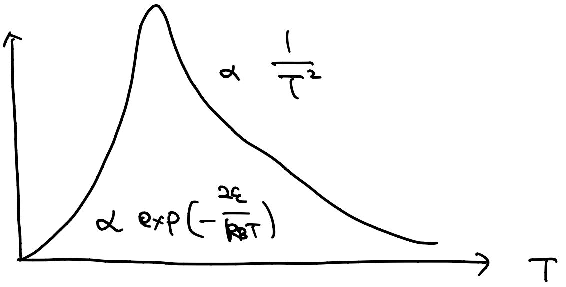
$T\to 0$ のとき、$\cosh\frac{\varepsilon}{k_BT} \sim \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)}{2}$ なので

$$
\begin{aligned}
C &\sim Nk_B\cdot\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)}\right)^2 \\
&= \frac{4N\varepsilon^2}{k_BT^2}\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{k_BT}\right)
\end{aligned}
$$

$T\to\infty$ のとき、$\cosh\frac{\varepsilon}{k_BT} \sim 1$ なので

$$
C \sim Nk_B\cdot\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^2 = \frac{N\varepsilon^2}{k_BT^2}.
$$

以上より



Ⅱ

(4) $-\mu H$ の固有状態がでる確率は、 $\dfrac{\exp\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)+\exp\left(-\frac{\mu H}{k_B T}\right)}$

であるから、
$$N_\uparrow = \frac{N\exp\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)+\exp\left(-\frac{\mu H}{k_B T}\right)}$$

同様に、
$$N_\downarrow = \frac{N\exp\left(-\frac{\mu H}{k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)+\exp\left(-\frac{\mu H}{k_B T}\right)}$$

(5) 磁化 M は、各粒子の磁気モーメントの総和であるから、

$$M = \mu N_\uparrow - \mu N_\downarrow$$
$$= \mu N \boxed{\frac{\left\{\exp\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)-\exp\left(-\frac{\mu H}{k_B T}\right)\right\}}{\exp\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)+\exp\left(-\frac{\mu H}{k_B T}\right)}} = \tanh\frac{\mu H}{k_B T}$$
$$= \mu H \tanh\frac{\mu H}{k_B T}$$

(6) 分配関数 $Z = \left(2\cosh\frac{\mu H}{k_B T}\right)^N$ で、
自由ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_B T \log Z$ より、

$$F = -k_B T N \log 2\cosh\frac{\mu H}{k_B T}$$

また、エントロピー S は

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left\{k_B T N \log 2\cosh\frac{\mu H}{k_B T}\right\}$$
$$= k_B N \log 2\cosh\frac{\mu H}{k_B T} + \cancel{k_B T} N \cdot \frac{\cancel{2}\sinh\frac{\mu H}{k_B T}}{\cancel{2}\cosh\frac{\mu H}{k_B T}} \cdot \frac{\mu H}{\cancel{k_B}} \cdot \left(-\frac{1}{T^{\cancel{2}}}\right)$$
$$= k_B N \log 2\cosh\frac{\mu H}{k_B T} - \frac{\mu H N}{T}\tan\frac{\mu H}{k_B T}$$
$$= k_B N\left\{\log 2\cosh\frac{\mu H}{k_B T} - \frac{\mu H}{k_B T}\tan\frac{\mu H}{k_B T}\right\}$$

(7) 断熱変化のとき $S=$ 一定であるから.

$$S = k_B N \left\{ \log 2\cosh \boxed{\frac{\mu H}{k_B T}} - \boxed{\frac{\mu H}{k_B T}} \tanh \boxed{\frac{\mu H}{k_B T}} \right\}$$

$\boxed{}$ が一定となるには. HとTは比例の関係でなければならず.
Hが弱めると. Tは同様に小さくなるといえる.

つまり. Hが $\frac{1}{10}$ となると. Tも $\frac{1}{10}$ となる.

Ⅲ (8) 1粒子について考える。

$$Z_1 = 1 + \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right)$$

これが独立に存在するのだから, 分配関数 Z は.

$$Z = Z_1^N = \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right) \right\}^N$$

(9) ヘルムホルツの自由エネルギー F は.

$$F = -k_B T \log Z$$

$$= -k_B T N \underline{\underline{\log\left(1 + \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{k_B T}\right)\right)}}$$

ここで

(i) $k_B T \ll \varepsilon_1 (\ll \varepsilon_2)$ のとき $=\!= \sim \log 1$

$F \sim 0$ ゆえに エントロピー $S \sim 0$

(ii) $\varepsilon_1 \ll k_B T \ll \varepsilon_2$ のとき. $=\!= \sim \log 2$

$F \sim -k_B T N \log 2$ $\quad \therefore\ S = k_B N \log 2$

(iii) $k_B T \gg \varepsilon_2\ (\gg \varepsilon_1)$ のとき $=\!= \sim \log 3$

$\to 1 \gg \frac{\varepsilon_2}{k_B T} \gg \frac{\varepsilon_1}{k_B T} \to 0$

$F \sim -k_B T N \log 3$ $\quad \therefore\ S = k_B N \log 3$

(9)もできれば使いたいけど
使うと概形がわからな…

(10) エネルギーEは、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ として、

$$E = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$$

$$= -N \frac{\partial}{\partial \beta} \log \left\{ 1 + \exp(-\beta \varepsilon_1) + \exp(-\beta \varepsilon_2) \right\}$$

$$= N \frac{\varepsilon_1 \exp(-\beta\varepsilon_1) + \varepsilon_2 \exp(-\beta\varepsilon_2)}{1 + \exp(-\beta\varepsilon_1) + \exp(-\beta\varepsilon_2)}$$

$\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ より

$$\simeq N \frac{\varepsilon_1 \exp(-\beta\varepsilon_1)}{1 + \exp(-\beta\varepsilon_1)} \simeq \frac{N\varepsilon_1}{\exp(\beta\varepsilon_1) + 1}$$

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial E}{\partial \beta}$$

$$= + \frac{1}{k_B T^2} N \varepsilon_1 \frac{1}{(\exp(\beta\varepsilon_1) + 1)^2} \cdot \varepsilon_1 \exp(\beta\varepsilon_1)$$

$$= k_B N \left(\frac{\varepsilon_1}{k_B T} \right)^2 \frac{\exp(\beta\varepsilon_1)}{(\exp(\beta\varepsilon_1) + 1)^2}$$

$$= \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon_1) + 2 + \exp(-\beta\varepsilon_1)}$$

(i) $T \to 0$ のとき $\beta \to \infty$

$$C \sim k_B N \left(\frac{\varepsilon_1}{k_B T} \right)^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{k_B T}\right)$$

(ii) $T \to \infty$ のとき $\beta \to 0$

$$C \sim k_B N \left(\frac{\varepsilon_1}{k_B T} \right)^2$$