問題3

I.

(1) $$a\Phi_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp(-\lambda x^2)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left\{x\exp(-\lambda x^2) - 2x\lambda\frac{\hbar}{m\omega}\exp(-\lambda x^2)\right\}$$

$$= x\exp(-\lambda x^2)\left(1-\frac{2\lambda\hbar}{m\omega}\right)=0$$

ゆえに、$\lambda = \dfrac{m\omega}{2\hbar}$ //

また、$H\Phi_0=\varepsilon_0\Phi_0$

$\Longleftrightarrow \hbar\omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\phi_0=\varepsilon_0\phi_0$ より、

$$\varepsilon_0=\frac{1}{2}\hbar\omega \quad //$$

(2) $$\phi_1 = a^\dagger\phi_0$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp(-\lambda x^2)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\underbrace{\left\{x+2x\frac{\hbar\lambda}{m\omega}\right\}}_{=\,x+\cancel{2}x\frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{m\omega}}\frac{\cancel{m\omega}}{\cancel{2\hbar}}}\exp(-\lambda x^2) = 2x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\exp(-\lambda x^2) \quad //$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega+\hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad //$$

II

(3) いま、Schrödinger方程式は、

$$\left\{\frac{1}{2m}(P_x^2+P_y^2)+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)\right\}f(x)g(y) = E\,f(x)g(y)$$

両辺を $f(x)g(y)$ で割って整理すると、

$$\frac{1}{f(x)}\left(\frac{P_x^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)f(x) + \frac{1}{g(y)}\left(\frac{P_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2y^2\right)g(y) = E$$

任意の x, y の値に対して左辺の2つの部分の和が常に定数 E に等しくなるためには、左辺の各項も定数でなければならない。その定数を E_{nx}, E_{ny} とおく。

(つまり、$E_n = E_{nx}+E_{ny}$)

$$\begin{cases} \cdot \quad \left(\dfrac{p_x^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) f(x) = E_{nx} f(x) \\ \cdot \quad \left(\dfrac{p_y^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 y^2\right) g(y) = E_{ny}\, g(y) \end{cases}$$

したがって、x・y方向にそれぞれで1次調和振動子として解くことができる。

- $E_0 = E_{0x} + E_{0y} = \hbar\omega$ 　縮退度は1.

  $f(x)\,g(y) = \phi_0(x)\,\phi_0(y)$

- $E_1 = \begin{cases} E_{0x} + E_{1y} \\ E_{1x} + E_{0y} \end{cases} = \dfrac{1}{2}\hbar\omega + \dfrac{3}{2}\hbar\omega = 2\hbar\omega$

  $f(x)\,g(y) = \begin{cases} \phi_0(x)\,\phi_1(y) \\ \phi_1(x)\,\phi_0(y) \end{cases}$ 　縮退度は2

(4) $\therefore\ [L_z, H] = 0$

理由　Hがxyに対して対称であるので、z軸方向について回転対称性が存在するから.

$\rightarrow$ L_z, H は可換で同時固有値をもつことができる.

(5) $L_z \psi_0 = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-\lambda(x^2+y^2)}$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(-2\lambda xy + 2\lambda yx\right) e^{-\lambda(x^2+y^2)} = 0$$

$\therefore\ L_z\psi_0 = 0 \quad \longrightarrow$ 固有値は 0

Lzの固有値

(6) $\underline{L_z\psi_1} = \boxed{l_z}\,\underline{\psi_1}$ を計算する.

Lzの固有状態

$$L_z\psi_1 = L_z\left(\alpha\,\phi_1(x)\phi_0(y) + \beta\,\phi_0(x)\phi_1(y)\right)$$

$$= \left(x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\alpha\cdot 2x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,e^{-\lambda(x^2+y^2)} + \beta\cdot 2y\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,e^{-\lambda(x^2+y^2)}\right)$$

$$= x\frac{\hbar}{i}\cdot\alpha\cdot 2x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\cdot -2y\lambda\,e^{-\lambda(x^2+y^2)} - y\frac{\hbar}{i}\cdot\alpha\cdot 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$- y\frac{\hbar}{i}\cdot\alpha\cdot 2x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\cdot -2\lambda x\cdot e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$+ x\frac{\hbar}{i}\cdot\beta\cdot 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,e^{-\lambda(x^2+y^2)} + x\frac{\hbar}{i}\cdot\beta\cdot 2y\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\cdot -2\lambda y\cdot e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$- y\cdot\frac{\hbar}{i}\cdot\beta\cdot 2y\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\cdot -2\lambda x\,e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$= \cancel{-4\alpha x^2 y\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}} - 2\alpha y\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$\cancel{+ 4\alpha x^2 y\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}}$$

$$+ 2\beta x\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)} \cancel{- 2\beta x y^2\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}}$$

$$\cancel{+ 2\beta x y^2\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}}$$

$$= 2\alpha y\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)} + 2\beta x\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$= -\alpha\cdot 2x\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\cdot\frac{\hbar}{i}\cdot\frac{y}{x} + \beta\cdot 2y\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\cdot\frac{\hbar}{i}\cdot\frac{x}{y}$$

いま, $L_z\psi_1 = L_z(\alpha y + \beta x)\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}$

$$= \underline{\frac{\hbar}{i}\left(-\alpha x + \beta y\right)}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)} = \underline{l_z(\alpha y + \beta x)}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

ゆえに, $\frac{\hbar}{i}(-\alpha x + \beta y) = l_z(\alpha y + \beta x)$ を満たす。 ―(＊)

任意の x, y に対して (＊) が成り立てば良いので

(*) は

$$-i\hbar(-\alpha x+\beta y) = l_z(\alpha y+\beta x)$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha i\hbar = l_z\beta & \cdots ① \\ -i\hbar\beta = l_z\alpha & \cdots ② \end{cases}$$

②式を①式に代入してαを消すと.

$$\hbar^2\beta = l_z^2\beta$$

$\hbar^2 = l_z^2$ より $l_z = \pm\hbar$

$l_z = +\hbar$ のとき. $\beta = i\alpha$
$l_z = -\hbar$ のとき $\beta = -i\alpha$ となる。

よって. $L_z\psi_1 = \pm\hbar\,\psi_1$ となり. E_1に対応する固有状態のL_zの固有値は $\pm\hbar$ //

III

(7) $H(B) = \dfrac{1}{2m}\left[(p_x + eA_x)^2 + (p_y + eA_y)^2\right] + \dfrac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$

で、また、$(A_x, A_y) = \dfrac{B}{2}(-y, x)$ なので これを代入すると、

$$H(B) = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x - \frac{eBy}{2}\right)^2 + \left(p_y + \frac{eBx}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{2m}\left[p_x^2 - eyBp_x + \left(\frac{eyB}{2}\right)^2 + p_y^2 + exBp_y + \left(\frac{exB}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

$$= \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \frac{e(xp_y - yp_x)B}{2m} + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2$$

となるので、 $W_1 = \dfrac{e(xp_y - yp_x)}{2m} = \dfrac{eL_z}{2m}$ //

(8) E_0 となるときの Schrödinger 方程式は、

$$H(B)\psi_0 = \left(E_0 + \frac{eL_z}{2m}B + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2\right)\psi_0$$

$$= \left(E_0 + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2\right)\psi_0 \qquad L_z\psi_0 = 0.$$

$$\mu = -\frac{\partial E(B)}{\partial B}\bigg|_{B=0} = -\frac{e^2}{4m}(x^2+y^2)B\bigg|_{B=0} = 0$$

E_1 となるときの Schrödinger 方程式は、

$$H(B)\psi_1 = \left(E_1 + \frac{eL_z}{2m}B + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2\right)\psi_1$$

$$= \left(E_1 \pm \frac{e\hbar}{2m}B + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2\right)\psi_1 \qquad L_z\psi_1 = \pm\hbar\psi_1$$

$$\mu = -\frac{\partial E}{\partial B}\bigg|_{B=0} = -\left(\mp\frac{e\hbar}{2m} + \frac{e^2}{4m}(x^2+y^2)B\right)\bigg|_{B=0}$$

$$= \pm\frac{e\hbar}{2m}$$ //

(9) $H(B) = \dfrac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) + \dfrac{e L_z B}{2m} + \dfrac{e^2}{8m}(x^2+y^2) B^2$

〰 に注目して、これらをまとめる。

$$= \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m (\omega^2 + \omega'^2)(x^2 + y^2) + \frac{e L_z B}{2m} \quad \left(\text{ただし、} \omega' = \frac{eB}{2m} \right)$$

(i) E_0 に対応する状態について。

$$H(B)\psi_0 = \left(\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \underbrace{(\omega^2 + \omega'^2)}_{= W^2} (x^2 + y^2) + \frac{e L_z B}{2m} \right) \psi_0$$

$$= \hbar W \psi_0$$

ゆえに、固有エネルギーは、$\hbar W = \hbar \sqrt{\omega^2 + \left(\dfrac{eB}{2m}\right)^2}$

$\omega \to 0$ のとき $\dfrac{\hbar e B}{2m}$ //

(ii) E_1 に対応する状態について。

(i)と同様にして、$H(B)\psi_1 = 2\hbar W \psi_1$

固有エネルギーは $2\hbar \sqrt{\omega^2 + \left(\dfrac{eB}{2m}\right)^2}$ //

$\omega \to 0$ のとき $\dfrac{\hbar e B}{m}$ //