大阪大学大学院

物理学専攻 2020

問題1

I (1) 運動エネルギー $\frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}\cdot\dot{\mathbb{r}} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2)$ より

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{\alpha}{r}$$

オイラー・ラグランジュ方程式は一般化座標 q を用いて

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

より.

r について

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r^2} = 0$$

θ について

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right)}_{mr^2\dot{\theta}} - \left(\cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - 0 = 0$$

(2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = r\cdot mr\dot{\theta} = L$ より $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{r^2} \longrightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{m}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$= \cancel{r}\cdot\frac{L}{mr^{\cancel{2}}}\cdot\frac{L}{mr^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{1}{r^2}$$

$$= \left(\frac{L}{m}\right)^2 u^3 + \frac{\alpha}{m}u^2$$

$\frac{1}{r} = u$

また、$\ddot{r} = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$ より

$$-\left(\frac{L}{m}\right)^2 \cancel{u^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = \left(\frac{L}{m}\right)^2 u^{\cancel{3}} + \frac{\alpha}{m}\cancel{u^2}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{\alpha m}{L^2} \quad \cdots ①$$

さらに $X = u + \frac{\alpha m}{L^2}$ とおくと. ①式は. $\frac{d^2X}{d\theta^2} = -X$ となり

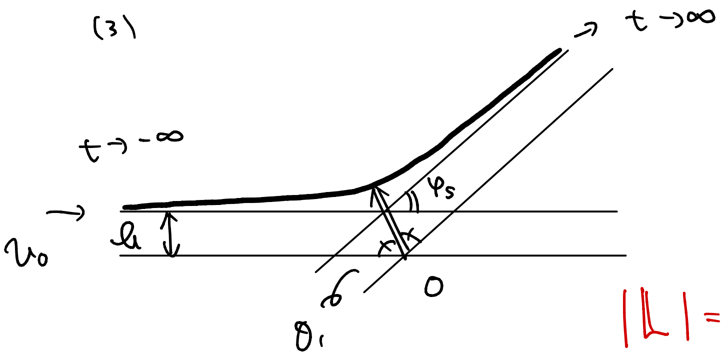
この微分方程式の解は $X(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0)$ と表せる.
これを r で書くと.

$$u + \frac{\alpha m}{L^2} = A\cos(\theta - \theta_0)$$

$$u = A\cos(\theta-\theta_0) - \frac{m\alpha}{L^2} \qquad \therefore\ r = \frac{1}{A\cos(\theta-\theta_0) - \frac{m\alpha}{L^2}}$$

//

(3)



角運動量は保存するので初速時を考えると、

$$L = m v_0 l$$

$$|\mathbb{L}| = |\mathbb{r}\times\mathbb{p}| = |\mathbb{r}\times m\boldsymbol{v}_0| = m r v_0 |\sin\theta|$$
$$= m r v_0 \frac{l}{r}$$
$$= m v_0 l$$

(4) $t\to\pm\infty$ のとき r は十分遠方であるといえる。

このことから、$A\cos\theta_1 - \frac{m\alpha}{L^2} = 0$ がいえる。 $\cos\theta_1 = \frac{m\alpha}{AL^2}$

(5) 式(4)を t で微分すると、

$$\dot{r} = -\left(A\cos\theta - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^{-2}\cdot\left(-A\sin\theta\cdot\dot{\theta}\right)$$

また、$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ より $\dot{r} = \dfrac{\frac{AL}{mr^2}\sin\theta}{\boxed{\left(A\cos\theta - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2} = \frac{1}{r^2}} = \frac{AL}{mr^2}\cdot r^2\sin\theta$

よって、$T\to-\infty$ のとき

$$v_0 = \frac{AL}{m\cancel{r^2}}\cdot\cancel{r^2}\cdot\sin\theta_1 \qquad \therefore \sin\theta_1 = \frac{mv_0}{AL}$$

(6) $\cos\left(\frac{\varphi_s}{2}+\theta_1\right) = \cos\frac{\varphi_s}{2}\cos\theta_1 - \sin\frac{\varphi_s}{2}\sin\theta_1 = 0$ より

$$\tan\frac{\varphi_s}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi_s}{2}}{\cos\frac{\varphi_s}{2}} = \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = \frac{\frac{\cancel{m}\alpha}{\cancel{A}L^{\cancel{2}}}}{\frac{\cancel{m}v_0}{\cancel{A}\cancel{L}}} = \frac{\alpha}{Lv_0}$$

II

(7) 同様にして

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) + \frac{\beta}{r^n}$$

オイラー・ラグランジュ方程式より

<u>rについて</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + n\frac{\beta}{r^{n+1}} = 0$$

<u>θについて</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = 0$$

(8) 動径方向に注目すると、

$$m\cdot 0 - mr_0\omega_0^2 + n\frac{\beta}{r_0^{n+1}} = 0$$

よって $$mr_0\omega_0^2 = \frac{n\beta}{r_0^{n+1}}$$ //

(9) $$m(\ddot{r_0}+\ddot{\rho}) - m(r_0+\rho)\dot{\theta}^2 + n\frac{\beta}{(r_0+\rho)^{n+1}} = 0$$

$$\therefore m\ddot{\rho} - m(r_0+\rho)\left(\frac{L}{m(r_0+\rho)^2}\right)^2 + \frac{n\beta}{(r_0+\rho)^{n+1}} = 0$$

$$m(r_0+\rho)^2\dot{\theta} = L$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m(r_0+\rho)^2}$$

$$n\beta(r_0+\rho)^{-(n+1)} = n\beta r_0^{-(n+1)}\left(1+\frac{\rho}{r_0}\right)^{-(n+1)}$$

$$= n\beta r_0^{-(n+1)}\left(1-(n+1)\frac{\rho}{r_0}\right)$$

$$= \frac{n\beta}{r_0^{n+1}} - \frac{n(n+1)\rho}{r_0^{n+2}}$$

$$m\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m\boxed{(r_0+\rho)^3}} + \frac{n\beta}{r_0^{n+1}} - \frac{n(n+1)\rho}{r_0^{n+2}} = 0$$

$$r_0^{-3}\left(1+\frac{\rho}{r_0}\right)^{-3} = r_0^{-3}\left(1-\frac{3\rho}{r_0}\right)$$

$$= \frac{1}{r_0^3} - \frac{3\rho}{r_0^4}$$

$$\therefore m\ddot{\rho} = \frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{3L^2}{mr_0^4}\rho - \frac{n\beta}{r_0^{n+1}} + \frac{n\beta(n+1)\rho}{r_0^{n+2}}$$

また、 $$mr_0\omega_0^2 = mr_0\left(\frac{L}{mr_0^2}\right)^2 = \frac{L^2}{mr_0^3} = \frac{n\beta}{r_0^{n+1}}$$ なので

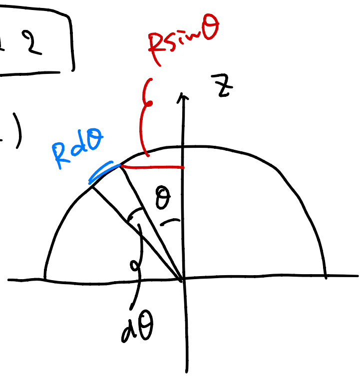
$$m\ddot{\rho} = \cancel{\frac{L^2}{mr_0^3}} - \frac{3L^2}{mr_0^4}\rho - \cancel{\frac{L^2}{mr_0^3}} + \frac{(n+1)L^2}{mr_0^4}\rho$$

$$\therefore m\ddot{\rho} = \frac{(n-2)L^2}{mr_0^4}\rho$$

$n-2<0$ より $n<2$ $\qquad\therefore\ \underline{n=1}$ //

問題2

(1)



左図より $2\pi R\sin\theta \times R\,d\theta = 2\pi R^2\sin\theta\,d\theta$

$\therefore\ dS = 2\pi R^2\sin\theta\,d\theta$

(2) 電流は単位時間あたりの電荷量であるから、環状電流 dI は、

$$dI = \sigma\,dS\,\omega = 2\pi R^2\sigma\omega\sin\theta\,d\theta$$

(3) 定義より

$$dm = dI \times (R\sin\theta)^2\pi$$
$$= 2\pi R^2\sigma\omega\sin\theta\,d\theta \times R^2\sin^2\theta\,\pi$$
$$= 2\pi^2R^4\sin^3\theta\,\sigma\omega\,d\theta$$

$\sin(\underbrace{\theta+2\theta}_{3\theta}) + \sin(\theta)$

$= \sin\theta\cos2\theta + \sin2\theta\cos\theta$

(4)

$$m = \int_0^\pi 2\pi^2R^4\sin^3\theta\,\sigma\omega\,d\theta$$
$$= 2\pi^2R^4\sigma\omega\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^\pi\sin^2\theta\cdot\sin\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^\pi\frac{1-\cos2\theta}{2}\cdot\sin\theta\,d\theta$$
$$= \underbrace{\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin\theta\,d\theta}_{=1} - \underbrace{\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin\theta\cos2\theta\,d\theta}_{=-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$$

$\int_0^\pi\sin\theta\cos2\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_0^\pi(\sin3\theta - \sin\theta)\,d\theta$

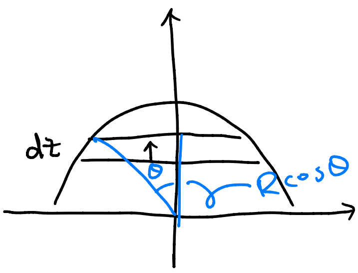
$= -\left[\frac{1}{6}\cos3\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right]_0^\pi$

$= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

$\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta = \left[-\cos\theta\right]_0^\pi = 2$

$\therefore\ m = \frac{8}{3}\pi^2R^4\sigma\omega$

(5) ウ



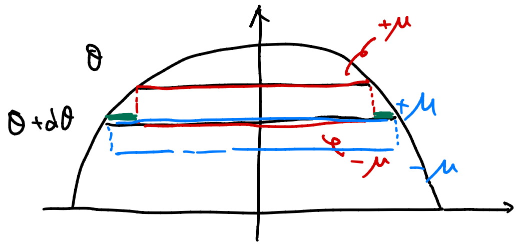
(6) $dI = \eta\,dz$

$z = R\cos\theta$

$|dz| = +R\sin\theta\,d\theta$ より $dI = \eta R\sin\theta\,d\theta$

$dI = 2\pi R^2 \sigma\omega \sin\theta \, d\theta$ と比較して $\eta = 2\pi R \sigma \omega$

(7)



円柱表面と球面ズレは、

$$\pi R^2 \left(\sin^2(\theta + d\theta) - \sin^2\theta \right)$$

$$= \pi R^2 \, 2\sin\theta\cos\theta \, d\theta$$

ゆえに、球面上に $2\eta\pi R^2 \sin\theta\cos\theta \, d\theta$ の磁荷が存在する。

球面上の面密度は、 $\dfrac{2\eta\pi R^2 \sin\theta\cos\theta \, d\theta}{\pi R^2 \sin^2\theta}$

$$= 2\eta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta$$

問題3

I.

(1)
$$a\phi_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp(-\lambda x^2)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left\{x\exp(-\lambda x^2) - 2x\lambda\frac{\hbar}{m\omega}\exp(-\lambda x^2)\right\}$$

$$= x\exp(-\lambda x^2)\left(1 - \frac{2\lambda\hbar}{m\omega}\right) = 0$$

ゆえに. $\lambda = \dfrac{m\omega}{2\hbar}$ //

また. $H\Phi_0 = \varepsilon_0\Phi_0$

$\longleftrightarrow$ $\hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\phi_0 = \varepsilon_0\phi_0$ より.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \text{ //}$$

(2)
$$\phi_1 = a^\dagger\phi_0$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp(-\lambda x^2)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left\{x + 2x\frac{\hbar\lambda}{m\omega}\right\}\exp(-\lambda x^2) = 2x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\exp(-\lambda x^2) \text{ //}$$

$$= x + \cancel{2}x\frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{m\omega}}\frac{\cancel{m\omega}}{\cancel{2\hbar}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega \text{ //}$$

II

(3) いま、Schrödinger方程式は.

$$\left\{\frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)\right\}f(x)g(y) = E f(x)g(y)$$

両辺を $f(x)g(y)$ で割って整理すると.

$$\frac{1}{f(x)}\left(\frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)f(x) + \frac{1}{g(y)}\left(\frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2y^2\right)g(y) = E$$

任意の x, y の値に対して左辺の2つの部分の和が常に定数 E に等しくなるためには.
左辺の各項も定数でなければならない。その定数を E_{nx}, E_{ny} とおく.

(つまり. $E_n = E_{nx} + E_{ny}$)

$$\begin{cases} \cdot \quad \left(\dfrac{p_x^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) f(x) = E_{nx} f(x) \\ \cdot \quad \left(\dfrac{p_y^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m\omega^2 y^2 \right) g(y) = E_{ny} g(y) \end{cases}$$

したがって、x・y 方向にそれぞれで1次調和振動子として解くことができる。

- $E_0 = E_{0x} + E_{0y} = \hbar\omega$ 縮退度は 1.

  $f(x)g(y) = \phi_0(x)\phi_0(y)$

- $E_1 = \begin{cases} E_{0x} + E_{1y} \\ E_{1x} + E_{0y} \end{cases} = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega = 2\hbar\omega$

  $f(x)g(y) = \begin{cases} \phi_0(x)\phi_1(y) \\ \phi_1(x)\phi_0(y) \end{cases}$ 縮退度は 2

(4) $\therefore \quad [L_z, H] = 0$

理由 Hが xy に対して対称であるので、z軸方向について回転対称性が存在するから.

$\rightarrow$ L_z, H は可換で同時固有値をもつことができる.

(5) $L_z \Psi_0 = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-\lambda(x^2+y^2)}$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(-2\lambda xy + 2\lambda yx\right) e^{-\lambda(x^2+y^2)} = 0$$

$\therefore\ L_z \Psi_0 = 0 \quad \longrightarrow$ 固有値は 0

Lzの固有値

(6) $L_z \Psi_1 = \boxed{l_z}\,\Psi_1$ を計算する.

Lzの固有状態

$$L_z \Psi_1 = L_z\left(\alpha\,\phi_1(x)\phi_0(y) + \beta\,\phi_0(x)\phi_1(y)\right)$$

$$= \left(x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\alpha\cdot 2x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,e^{-\lambda(x^2+y^2)} + \beta\cdot 2y\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,e^{-\lambda(x^2+y^2)}\right)$$

$$= x\frac{\hbar}{i}\cdot\alpha\cdot 2x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\cdot -2y\lambda\, e^{-\lambda(x^2+y^2)} - y\frac{\hbar}{i}\cdot\alpha\cdot 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$- y\frac{\hbar}{i}\cdot\alpha\cdot 2x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\cdot -2\lambda x\cdot e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$+ x\frac{\hbar}{i}\cdot\beta\cdot 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,e^{-\lambda(x^2+y^2)} + x\frac{\hbar}{i}\cdot\beta\cdot 2y\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\cdot -2\lambda y\cdot e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$- y\cdot\frac{\hbar}{i}\cdot\beta\cdot 2y\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\cdot -2\lambda x\, e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$= \cancel{-4\alpha x^2 y\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}} - 2\alpha y\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$\cancel{+ 4\alpha x^2 y\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}}$$

$$+ 2\beta x\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)} \cancel{- 2\beta x y^2\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}}$$

$$\cancel{+ 2\beta x y^2\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{3/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}}$$

$$= 2\alpha y\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)} + 2\beta x\frac{\hbar}{i}\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

$$= -\alpha\cdot 2x\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\cdot\frac{\hbar}{i}\cdot\frac{y}{x} + \beta\cdot 2y\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\cdot\frac{\hbar}{i}\cdot\frac{x}{y}$$

いま, $L_z \Psi_1 = L_z(\alpha y + \beta x)\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(-\alpha x + \beta y\right)\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)} = l_z(\alpha y + \beta x)\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}$$

ゆえに, $\frac{\hbar}{i}(-\alpha x + \beta y) = l_z(\alpha y + \beta x)$ を満たす。 ⊕

任意の x, y に対して ⊕ が成り立てば良いので

(*) は

$$-i\hbar(-\alpha x+\beta y) = l_z(\alpha y+\beta x)$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha i\hbar = l_z\beta & \cdots\cdots ① \\ -i\hbar\beta = l_z\alpha & \cdots ② \end{cases}$$

②式を①式に代入して α を消すと、

$$\hbar^2\beta = l_z^2\beta$$

$$\hbar^2 = l_z^2 \text{ より } l_z = \pm\hbar$$

$l_z = +\hbar$ のとき、 $\beta = i\alpha$
$l_z = -\hbar$ のとき $\beta = -i\alpha$ となる。

よって、 $L_z\psi_1 = \pm\hbar\,\psi_1$ となり、E_1 に対応する固有状態の L_z の固有値は $\pm\hbar$ //

III

(7) $$H(B) = \frac{1}{2m}\left[(p_x + eA_x)^2 + (p_y + eA_y)^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

で、また、$(A_x, A_y) = \frac{B}{2}(-y, x)$ なので これを代入すると、

$$H(B) = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x - \frac{eBy}{2}\right)^2 + \left(p_y + \frac{eBx}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{2m}\left[p_x^2 - eyBp_x + \left(\frac{eyB}{2}\right)^2 + p_y^2 + exBp_y + \left(\frac{exB}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

$$= \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \frac{e(xp_y - yp_x)B}{2m} + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2$$

となるので、 $W_1 = \frac{e(xp_y - yp_x)}{2m} = \frac{eL_z}{2m}$ //

(8) E_0となるときの Schrödinger 方程式は、

$$H(B)\psi_0 = \left(E_0 + \frac{eL_z}{2m}B + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2\right)\psi_0$$

$$= \left(E_0 + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2\right)\psi_0$$

$L_z\psi_0 = 0$.

$$\mu = -\frac{\partial E(B)}{\partial B}\bigg|_{B=0} = -\frac{e^2}{4m}(x^2+y^2)B\bigg|_{B=0} = 0$$

E_1となるときの Schrödinger 方程式は、

$$H(B)\psi_1 = \left(E_1 + \frac{eL_z}{2m}B + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2\right)\psi_1$$

$$= \left(E_1 \pm \frac{e\hbar}{2m}B + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2\right)\psi_1$$

$L_z\psi_1 = \pm\hbar\psi_1$

$$\mu = -\frac{\partial E}{\partial B}\bigg|_{B=0} = -\left(\mp\frac{e\hbar}{2m} + \frac{e^2}{4m}(x^2+y^2)B\right)\bigg|_{B=0}$$

$$= \pm\frac{e\hbar}{2m}$$ //

(9) $$H(B) = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \frac{eL_zB}{2m} + \frac{e^2}{8m}(x^2+y^2)B^2$$

に注目して、これらをまとめる。

$$= \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega^2+\omega'^2)(x^2+y^2) + \frac{eL_zB}{2m} \qquad \left(ただし、\omega' = \frac{eB}{2m}\right)$$

(i) E_0 に対応する状態について。

$$H(B)\psi_0 = \left(\frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\underbrace{(\omega^2+\omega'^2)}_{= W^2}(x^2+y^2) + \frac{eL_zB}{2m}\right)\psi_0$$

$$= \hbar W \psi_0$$

ゆえに、固有エネルギーは、$\hbar W = \hbar\sqrt{\omega^2+\left(\frac{eB}{2m}\right)^2}$

$\omega \to 0$ のとき $\frac{\hbar eB}{2m}$ //

(ii) E_1 に対応する状態について。

(i)と同様にして、$H(B)\psi_1 = 2\hbar W\psi_1$

固有エネルギーは $2\hbar\sqrt{\omega^2+\left(\frac{eB}{2m}\right)^2}$ //

$\omega \to 0$ のとき $\frac{\hbar eB}{m}$ //

問題4

I.

(1) $dG(T,H) = dU - SdT - TdS - MdH - HdM$

$= \cancel{TdS} + \cancel{HdM} - SdT - \cancel{TdS} - MdH - \cancel{HdM}$

$= -SdT - MdH$ //

(2) $dG(T,H) = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial G}{\partial H}\right)_T dH$ より

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_H = -S \\ \left(\frac{\partial G}{\partial H}\right)_T = -M \end{cases} \quad \text{なので} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial H} = -\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial H \partial T} = -\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$$

よって、

$$\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \quad //$$

(3) 熱力学第1法則より $dU = d'Q + d'W$ がいえる。

また、熱容量 C は $C = \frac{d'Q}{dT}$ で定義される。

(i) 磁化一定のとき。

$$\begin{aligned} d'Q &= dU(T,M) - HdM \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M dT + \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T dM - HdM \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M dT + \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T - H\right\} dM \end{aligned}$$

$$C_M = \left(\frac{d'Q}{dT}\right)_M = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M$$

(ii) 磁場一定のとき。

$$\begin{aligned} d'Q &= dU(T,H) - HdM \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T dH - HdM(T,H) \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T dH - H\cdot\left\{\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T dH\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_H = \left(\frac{d'Q}{dT}\right)_H &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H - H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H - H\alpha \quad // \end{aligned}$$

(4) 式(★)より

$$dU = TdS + HdM$$

$$= T\left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T dH \right\} + H\left\{ \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T dH \right\}$$

$$= \left\{ T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H + H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \right\} dT + \left\{ T\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T + H\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T \right\} dH$$

$$= (C_H + H\alpha)\, dT + (T\alpha + H\chi)\, dH$$

また、

$$dU(T, H) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T dH$$

であるから. $\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T = T\alpha + H\chi$ //

また.

(5) $$dU(T, H(T, M)) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T dH$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H dT + \left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T \left\{ \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M}_{= -\frac{\alpha}{\chi}} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_T dM \right\}$$

$$= \left\{ C_H + H\alpha - (T\alpha + H\chi)\cdot\frac{\alpha}{\chi} \right\} dT + (T\alpha + H\chi)\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_T dM.$$

また.

$$dU(T, M) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M dT + \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T dM$$

$$\therefore \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M = C_H + \cancel{H\alpha} - \frac{T\alpha^2}{\chi} - \cancel{H\alpha} = C_H - \frac{T\alpha^2}{\chi}$$ //

II

(6) 磁場一様であるとき $h_i = h$ より 分配関数 Z は

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm1} \exp(-\beta \mathcal{H})$$

$$= \sum_{\sigma_1=\pm1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm1} \prod_{i=1}^{N} \exp(+\beta\mu\sigma_i h)$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \sum_{\sigma_i=\pm1} \exp(\beta\mu\sigma_i h)$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \left(e^{\beta\mu h} + e^{-\beta\mu h}\right) = \left(e^{\beta\mu h} + e^{-\beta\mu h}\right)^N = (2\cosh\beta\mu h)^N \quad //$$

エネルギー期待値 E は、

※ 全部の状態というのを α とおいた。上でおいた i とは意味が違う。

$$E = \frac{\sum_\alpha H_\alpha e^{-\beta H_\alpha}}{\sum_\alpha e^{-\beta H_\alpha}}$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_\alpha H_\alpha e^{-\beta H_\alpha}$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_\alpha -\frac{\partial e^{-\beta H_\alpha}}{\partial \beta}$$

$$= -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta}$$

よって、

$$E = -N \frac{\partial \log 2\cosh\beta\mu h}{\partial \beta}$$

$$= -N \cdot \frac{\cancel{2}\sinh\beta\mu h}{\cancel{2}\cosh\beta\mu h} \cdot \mu h$$

$$= -N\mu h \tanh\beta\mu h \quad //$$

(7) それぞれの粒子は独立であり、相互作用していないので

$$Z = \prod_{i=1}^{N} Z_i$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sum_{i=1}^{N}\log Z_i\right) = \sum_{i=1}^{N} E_i$$

と書けるはずである。 1粒子の分配関数 Z_i は、

$$Z_i = e^{-\beta\mu h\varepsilon_i} + e^{\beta\mu h\varepsilon_i}$$

$$\therefore \quad E_i = -\mu h\varepsilon_i \tanh\beta\mu h\varepsilon_i$$

$$\therefore \quad E = \sum_{i=1}^{N} E_i$$

$$= \int_0^{\varepsilon_{max}} d\varepsilon \cdot (-\mu h\varepsilon \tanh\beta\mu h\varepsilon) \cdot g(\varepsilon)$$

$$= -\int_0^{\varepsilon_{max}} d\varepsilon\ \mu h\varepsilon \tanh \beta\mu h\varepsilon \quad g(\varepsilon) \quad //$$

(8)
$$E = -\int_0^{\varepsilon_{max}} d\varepsilon\ \mu h\varepsilon \tanh(\beta\mu h\varepsilon)\cdot NA\varepsilon^{r}$$

$$C = \frac{dE}{dT}$$
$$= k\beta^2 \int_0^{\varepsilon_{max}} d\varepsilon\ NA\mu h\varepsilon^{r+1} \frac{d}{d\beta} \tan(\beta\mu h\varepsilon)$$
$$= \int_0^{\varepsilon_{max}} d\varepsilon\ NA\mu^2 h^2 \varepsilon^{r+2}\, k\beta^2 \frac{1}{\cosh^2(\beta\mu h\varepsilon)}$$

(9) $r=0$、$\beta\mu\varepsilon_{max}h \sim \infty$ とする。
また、$x = \beta\mu\varepsilon h$ と変数変換すると、

$dx = \beta\mu h\, d\varepsilon$ より

$$C = \frac{ANk}{\beta\mu h} \underbrace{\int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{\cosh^2 x}}_{=\frac{\pi^2}{12}}$$
$$= \frac{\pi^2}{12}\frac{kNA}{\beta\mu h} \propto T$$