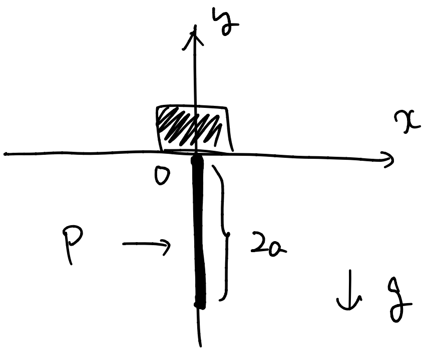
問題1

I.



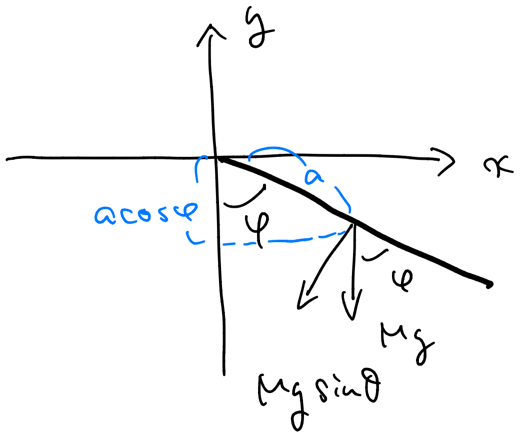
(1) O まわりの慣性モーメント

$$I_0 = \frac{M}{2a}\int_0^{2a} y^2\,dy$$

$$= \frac{M}{2a}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{M}{\cancel{2a}}\cdot\frac{1}{3}\cdot(2a)^{\cancel{3}\,2} = \frac{4}{3}Ma^2$$ //

(2) 回転運動の運動方程式は、



$$I_0\ddot{\varphi} = -a\cdot Mg\sin\varphi$$

$$\sim -aMg\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{Mga}{I_0}\varphi$$

ゆえに角振動数 ω は、 $\omega = \sqrt{\dfrac{Mga}{I_0}}$ //

(3) $\mathbb{L} = \mathbb{r}\times\mathbb{P}$ より $\overbrace{I\dot{\varphi} = aP}^{z成分に注目すると}$ がいえる。 $\dot{\varphi} = \dfrac{aP}{I}$

力学的エネルギー保存則より

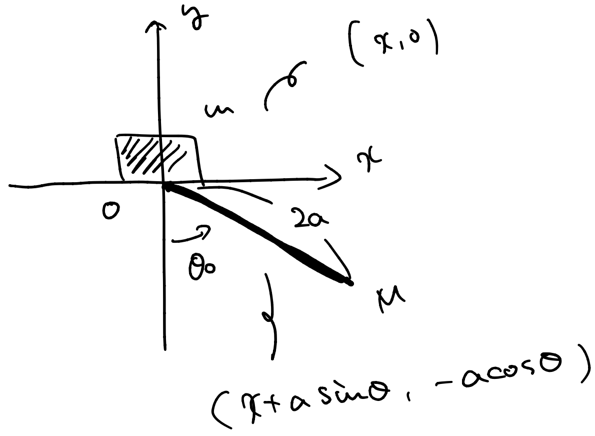
$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = Mga(1-\cos\varphi_0) \sim Mga\left(1-1+\frac{1}{2}\varphi_0^2\right)$$

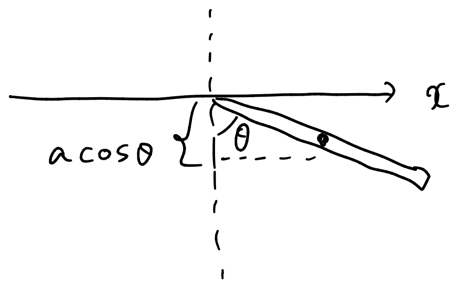
$$\cancel{\frac{1}{2}}I\left(\frac{aP}{I}\right)^2 = Mga\cancel{\frac{1}{2}}\varphi_0^2$$

$$\varphi_0 = \sqrt{\left(\frac{aP}{I}\right)^2 I \Big/ Mga} = P\sqrt{\frac{a}{MgI}}$$ //

II.

(4)





棒Aの速度成分は. $\dot{x}' = \dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta$, $\dot{y}' = a\dot{\theta}\sin\theta$ より.

この系の運動エネルギーTは.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left\{(\dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (a\dot{\theta}\sin\theta)^2\right\} + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + M\dot{x}a\dot{\theta}\cos\theta + (a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

$$U = \underbrace{0}_{\text{台Aのポテンシャル}} + \underbrace{Mg(-a\cos\theta)}_{\text{棒のポテンシャル}} = -Mga\cos\theta$$

(5) $L = T - U$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + M\dot{x}a\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}M(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + Mga\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + M\dot{x}a\dot{\theta}\left(1 - \cancel{\frac{1}{2}\theta^2}\right) + \frac{1}{2}M(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$
$$+ Mga\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)$$

← 3次以上より.

$$= \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \left(\frac{1}{2}Ma^2 + \frac{1}{2}I\right)\dot{\theta}^2 + Ma\dot{x}\dot{\theta}$$
$$+ Mga - \frac{1}{2}Mga\theta^2.$$

定数hとして. $L' = L + h$ は成立するので

$$L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(Ma^2 + I)\dot{\theta}^2 + Ma\dot{x}\dot{\theta} - \frac{1}{2}Mga\theta^2$$

//

(6) x, θ に関するオイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m+M)\ddot{x} + Ma\ddot{\theta} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow (m+M)\ddot{x} + Ma\ddot{\theta} = 0 \quad // \quad —— ☆$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = (Ma^2 + I)\ddot{\theta} + Ma\ddot{x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -Mga\theta \end{cases}$$

$$\longrightarrow (Ma^2+I)\ddot{\theta} + Ma\ddot{x} = -Mga\theta \quad // \quad —— ☆☆$$

(7) $m \to \infty$ のとき ☆ は、$m\ddot{x} = 0$ となり、台Aは、動かない。つまり $\ddot{x} = 0$ より、☆☆ は、

$$(Ma^2+I)\ddot{\theta} = -Mga\theta$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{Mga}{Ma^2+I}\theta$$

ゆえに、角振動数 $\sqrt{\dfrac{Mga}{Ma^2+I}}$ の振動をする。//

(8) $m = 0$ のとき、☆ は、$M\ddot{x} + Ma\ddot{\theta} = 0$ 、$\Rightarrow \ddot{x} = -a\ddot{\theta}$

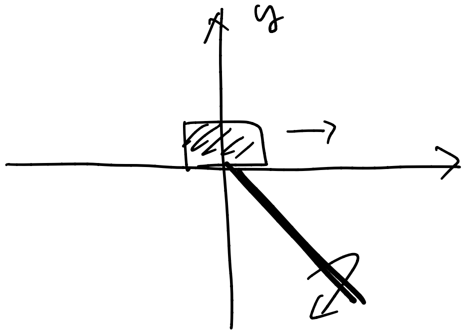
☆☆ に代入すると、

$$(Ma^2+I)\ddot{\theta} + Ma(-a\ddot{\theta}) = -Mga\theta$$

$$I\ddot{\theta} = -Mga\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mga}{I}\theta$$

角振動数 $\sqrt{\frac{Mga}{I}}$ の振動をする。



この系の外力はないので
この系の重心は
静止している。

台Aと棒は
逆向きの動きをする。

(9) 微分方程式：

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{x} + Ma\ddot{\theta} = 0 & \text{——— ☆} \\ (Ma^2+I)\ddot{\theta} + Ma\ddot{x} = -Mga\theta & \text{——— ☆☆} \end{cases}$$

☆を☆☆に代入すると、

$$(Ma^2+I)\ddot{\theta} + Ma\left(-\frac{Ma}{m+M}\ddot{\theta}\right) = -Mga\theta$$

$$\frac{Mma^2}{m+M}\ddot{\theta} = -Mga\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{mga}{m+M}\theta \text{ で } \omega := \sqrt{\frac{mga}{m+M}}$$

$\therefore$ $\theta(t) = Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t}$ （A、Bは任意定数）

$$\theta(0) = A + B = \theta_0$$

$\dot{\theta}(t) = i\omega(B-A) = 0$ より $A=B$.

$$\theta(t) = \theta_0\frac{e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}}{2}$$

$$= \theta_0\cos(\omega t) \quad //$$

また、$\ddot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega^2 \cos(\omega t)$ で ㊍ に代入すると、

$$(m+M)\ddot{x} = -\theta_0 \omega^2 M a \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{M}{m+M} a \theta_0 \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{M}{m+M} a \theta_0 \omega \sin(\omega t) + C$$

$$x(t) = \frac{M}{m+M} a \theta_0 \cos(\omega t) + Ct + D$$

$$x(0) = \frac{M}{m+M} a \theta_0 + D = 0 \qquad \therefore\ D = -\frac{M}{m+M} a \theta_0$$

$$\dot{x}(0) = C = 0$$

以上より $x(t) = \frac{M}{m+M} a \theta_0 \cos(\omega t) - \frac{M}{m+M} a \theta_0$ //