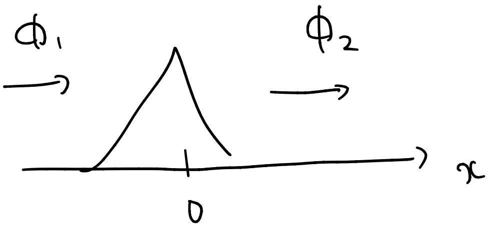
問題 3

I.



(1) $x \to 0$ で一致することから

$$\Phi_1(0) = \Phi_2(0) \quad \cdots\cdots ①$$

がいえる。

$$\therefore \quad 1 + r = t$$

(2) Schrödinger 方程式の両辺を $-\varepsilon \sim \varepsilon$ で積分すると

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x)\,dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V(x)\Phi(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E\phi(x)\,dx.$$

$\varepsilon \to 0$ で 0.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d}{dx}\Phi(x)\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dx}\Phi(x)\Big|_{x=\varepsilon} - \frac{d}{dx}\Phi(x)\Big|_{x=-\varepsilon}\right)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -V_0\,\delta(x)\,\Phi(x)\,dx$$

$$= -V_0\Phi(0)$$

以上より $\quad -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{d}{dx}\Phi(x)\Big|_{x=\varepsilon} - \dfrac{d}{dx}\Phi(x)\Big|_{x=-\varepsilon}\right) = V_0\Phi(0)$

$$\frac{d}{dx}\Phi(x)\Big|_{x=\varepsilon} = iqt\,e^{iq\varepsilon}$$

$$\frac{d}{dx}\Phi(x)\Big|_{x=-\varepsilon} = iq\,e^{-iq\varepsilon} - iqr\,e^{+iq\varepsilon}$$

$\varepsilon \to 0$ において.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}iq\left(t - (1-r)\right) = V_0 t$$

$$\Rightarrow \quad t + r = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 iq}t + 1 = \frac{2i}{\omega}t + 1$$

$= \frac{1}{\omega}$

//

(3)

$$\left.\begin{array}{l} t+r=\dfrac{2i}{\omega}t+1 \\ 1+r=t \end{array}\right\}$$ より

$$t+t-1=\frac{2i}{\omega}t+1$$

$$\left(\frac{\cancel{2}\omega-\cancel{2}i}{\omega}\right)t=\cancel{2} \qquad t=\frac{\omega}{\omega-i}$$

$$|t|^2=\frac{\omega^2}{(\omega-i)(\omega+i)}=\frac{\omega^2}{\omega^2+1}$$

また $r=t-1=\dfrac{\omega}{\omega-i}-\dfrac{\omega-i}{\omega-i}=\dfrac{i}{\omega-i}$

$$|r|^2=\frac{1}{(\omega-i)(\omega+i)}=\frac{1}{\omega^2+1}$$

//

(4) $E\to 0$ のとき. $q=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\to 0$

$|t|^2\to 0$, $|r|^2\to 1$

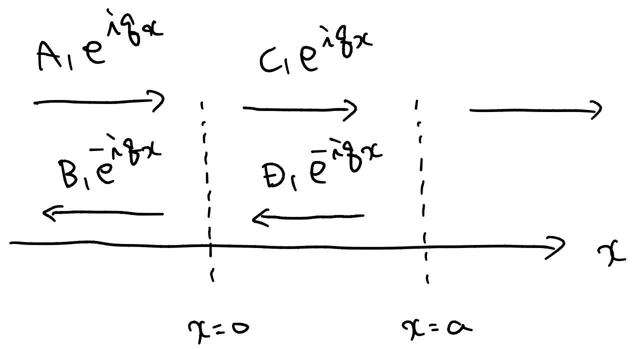
$E\to\infty$ のとき $q\to\infty$

$|t|^2=\dfrac{1}{1+\frac{1}{\omega^2}}\to 1$, $|r|^2\to 0$

次に $V_0\to -V_0$ となったとき. $\omega^2\to\omega^2$ なので 不変。

Ⅱ.

(5)



上図より B_1 は A_1 の反射分と D_1 の透過分の和で表せる。C_1 は A_1 の透過分と D_1 の反射分の和で表せる。ゆえに、

$$\begin{cases} B_1 = rA_1 + tD_1 & \cdots\cdots ② \\ C_1 = tA_1 + rD_1 & \cdots ③ \end{cases}$$

(6)

$\psi_1(0) = \psi_2(0)$ より $A_1 + B_1 = C_1 + D_1$ $\cdots$ ④

ゆえに、③と④より

$$C_1 = tA_1 + r(A_1 + B_1 - C_1)$$

$$(1+r)C_1 = (t+r)A_1 + rB_1$$

$$\therefore\ C_1 = \frac{t+r}{\underbrace{1+r}_{=t}} A_1 + \frac{r}{\underbrace{1+r}_{=t}} B_1$$

また、②より

$$D_1 = -\frac{r}{t}A_1 + \frac{1}{t}B_1$$

以上より、

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{t+r}{t} & \frac{r}{t} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}}_{=Z} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

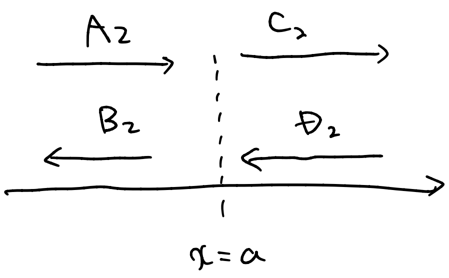
(7)

$$\psi_2(x) = \underbrace{A_2 e^{-iqa}}_{=C_1} e^{iqx} + \underbrace{B_2 e^{iqa}}_{=D_1} e^{-iqx}$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{iqa} & 0 \\ 0 & e^{-iqa} \end{pmatrix}}_{=Y} \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix}$$

//

(8)



上図より.

$$C_2 = tA_2 + rD_2$$

$$B_2 = rA_2 + tD_2$$

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = Z\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = ZY\begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = ZYZ\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

同様にして,

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \underbrace{ZYZ}_{=X}\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} t_2 \\ 0 \end{pmatrix} = ZYZ\begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{t+r}{t} = \frac{1}{\frac{\omega}{\omega-i}} = \frac{\omega-i}{\omega}, \quad \frac{r}{t} = \frac{\frac{i}{\omega-i}}{\frac{\omega}{\omega-i}} = \frac{i}{\omega}$$

$$-\frac{r}{t} = -\frac{\frac{i}{\omega-i}}{\frac{\omega}{\omega-i}} = -\frac{i}{\omega}, \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{\frac{\omega}{\omega-i}} = \frac{\omega-i}{\omega}$$

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{t+r}{t} & \frac{r}{t} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega-i}{\omega} & \frac{i}{\omega} \\ -\frac{i}{\omega} & \frac{\omega-i}{\omega} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} e^{i\cancel{q}\cdot 2n\pi/\cancel{q}} & 0 \\ 0 & e^{-iq\cdot 2n\pi/q} \end{pmatrix} = I \quad (単位行列)$$

$$Z^2 = \begin{pmatrix} \frac{\omega+2i}{\omega} & \frac{2i}{\omega} \\ -\frac{2i}{\omega} & \frac{\omega-2i}{\omega} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{ZYZ}_{=Z^2} \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad より$$

$$t_2 = \frac{\omega + 2i}{\omega} + \frac{2i}{\omega} r_2 \quad \cdots ⑤$$

$$0 = -\frac{2i}{\omega} + \frac{\omega - 2i}{\omega} r_2 \quad \cdots ⑥$$

⑥より

$$\frac{\omega - 2i}{\omega} r_2 = \frac{2i}{\omega}$$

$$r_2 = \frac{2i}{\omega - 2i}$$

-4

⑤より

$$t_2 = \frac{\omega + 2i}{\omega} + \frac{2i}{\omega} \cdot \frac{2i}{\omega - 2i}$$

$$= \frac{\omega^2 + 4 - 4}{\omega(\omega - 2i)}$$

$$= \frac{\omega}{\omega - 2i}$$

$$|r_2|^2 = \frac{2i}{\omega - 2i} \cdot \frac{-2i}{\omega + 2i} = \frac{4}{\omega^2 + 4}$$

$$|t_2|^2 = \frac{\omega}{\omega - 2i} \cdot \frac{\omega}{\omega + 2i} = \frac{\omega^2}{\omega^2 + 4}$$

- $x=0$ にくらべて $x=a$ では反射率が高く透過率が小さい。

- ポテンシャルの壁を2つおくことはポテンシャルの高さを2倍にするのと等しい
  (ω において $V_0 \to 2V_0$ と同じ)